Do nekonečna a ještě dál 2

2. seriálová série — Termín odeslání: 8. února 2016

Úloha 1. (5 bodů)

Dokažte z axiomů teorie množin platnost formule

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)\big((c \in b) \Leftrightarrow (\exists d \in a)(c \subset d)\big).$$

Úloha 2. (5 bodů)

Je dána funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kdykoli zvolíme reálná čísla $a < b$ a množina $\{f(x) : a < x < b\}$ má největší prvek, nazveme tento prvek *lokálním maximem* funkce f. Dokažte, že množina všech lokálních maxim funkce f je spočetná.

Úloha 3. (5 bodů)

O množině $X \subset \omega_1$ řekneme, že je *šikovná*, pokud

(i) X je nespočetná,

(ii) pro každou spočetnou množinu $Y \subset X$ je $\bigcup Y$ prvkem X.

Dokažte, že průnik dvou šikovných množin je opět šikovná množina.