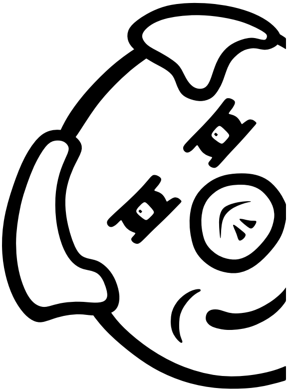
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



Podzimní část dávno skončila, sníh už takřka roztál a s příchodem jara se blíží i konec dalšího ročníku našeho semináře. Ještě ale není pozdě bojovat o lepší výsledky! Určitě si přečti přiložená vzorová řešení (pokud jsi to ještě nestihl(a) na internetu) i těch úloh, které jsi neřešil(a) – pochopení řešení je pro další účast v semináři zrovna tak užitečné jako jejich samostatné nalezení. Hlavně pak možná některé myšlenky využiješ při bloumání nad poslední sérií, která je tematicky poskládaná ze všech předchozích. A je obzvlášť důležitá, protože se v ní počítají body ze všech odeslaných úloh!

Kromě finálního myšmaše a třetí jarní série o cifrách nás samozřejmě čeká i poslední série seriálová. Potřebné znalosti o geometrii trojúhelníka získáš při čtení třetího dílu seriálu, který dokončí povídání o kamarádech a seznámí Tě třeba s Ponceletovým porismatem, Fontenovými větami a dalšími krásnými vlastnostmi trojúhelníka, které jen tak někdo nezná.

Nezbývá tedy než doufat, že Tě úlohy i seriál budou bavit a že se spolu potkáme na Náboji a na výletě.

Za ostatní organizátory zdraví a spoustu dobrých nápadů při řešení Ti přeje

Bára Kociánová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Poslední díl seriálu – Geometrie trojúhelníka III.
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Příloha: Pozvánka na jarní výlet

Náboj

Po dvanácti úspěšných ročnících se 7. dubna opět uskuteční matematická soutěž Náboj pro pětičlenné týmy ze středních škol napříč Evropou, která bude probíhat najednou ve dvanácti různých městech, u nás v Praze a Opavě. A v Praze se nebude konat v ničem menším než v Průmyslovém paláci, který pojme okolo 200 týmů!

Úlohy budou jako vždycky pěkné a hravé, ceny pro první týmy lákavé. Máš ve škole čtyři kamarády, které taky baví matika?[1] Dáš si raději místo školy chutnou bagetu a pár fajn úloh? Pak se určitě rychle přihlas, než Ti Tvoje místo někdo vyfoukne – přihlašování se spouští již 6. března!

[1] Nebo alespoň umějí rychle běhat s vyřešenými úlohami?

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Jarní výlet

Zveme Tě také na tradiční jarní výlet, který se koná v sobotu 8. dubna, tedy den po Náboji. Přijď si s námi provětrat hlavu v okolí Karlštejna. Jestli plánuješ jít, dej nám předběžně vědět[2]. Těšíme se na Tebe!

[2]Vyplněním svého jména zde: *https://goo.gl/RSWzFM*

Functions

4TH autumn series | Model solutions

Problem 1.

David found the quadratic function $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$, $f(x) = x^2$ and a function $g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$. For each of the compositions $f \circ g$ or $g \circ f$ decide whether it may be injective.

(David Hruška)

Solution:

First have a look at the function $f \circ g$. We will show that this composition may be injective for some g. Such function g must satisfy the condition $|(g(x_1))| \neq |(g(x_2))|$ for each x_1, x_2 two distinct elements of $\langle 0, \infty)$ (otherwise $f(g(x_1)) = (g(x_1))^2 = (g(x_2))^2 = f(g(x_2))$, hence $f \circ g$ would not be injective).

We can see that this condition is met e. g. for $g(x) = x$ or $g(x) = \sqrt{x}$, since then $(f \circ g)(x) = x^2$, resp. $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, both of them are injective functions on $\langle 0, \infty)$.

In contrast, the composition $g \circ f$ cannot be injective since $-1 \neq 1$ and

$$g(f(-1)) = g((-1)^2) = g(1^2) = g(f(1)).$$

Poznámky:

Řešení se sešla vskutku rozmanitá, takže bylo bohužel potřeba využít celou bodovací škálu. V první části stačilo najít příklad jedné funkce g, pro kterou je složení prosté, v druhé dosadit opačná čísla a ukázat rovnost funkčních hodnot. Často řešení obsahovala správné závěry, ale bez dostatečného zdůvodnění; například pouze stanovit podmínky na g (což ani nebylo nutné) nestačí, protože není obecně jisté, že taková funkce existuje. To se právě nejsnáze ukáže tím, že se nějaká taková konkrétní funkce najde.

Občas se také v první části objevovalo tvrzení, že g musí mít pouze nezáporné nebo pouze nekladné hodnoty, případně že stačí, aby byla prostá. Ani jedno neplatí, jak je vidět z protipříkladů $g(x) = -x$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $g(x) = x$ pro $x \in (1, \infty)$, respektive $g(x) = x - 1$. Platí, že $f \circ g$ bude prostá právě tehdy, když funkce $|g(x)|$ je prostá.

Ráda bych ještě podotkla, že k sérii byl vydán úvodní text. I když třeba funkcím rozumíte, je dobré si ho přečíst, bylo tam vysvětlené značení a další pojmy. Takhle se několikrát stalo, že „$g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$“ bylo interpretováno tak, že funkce g je *na* $\mathbb{R}$ (tedy že *codomain* a *range* splývají), což ale není obecně pravda. Podobně výrazy *domain* a *codomain* označují množiny, nikoliv konkrétní argumenty či funkční hodnoty v bodě.

(Anička Doležalová)

Problem 2.

Is there a function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(f(n)) < f(n)$ for all positive integers n?

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Solution:

We will prove by contradiction that such function cannot exist. If it exists, its range $\operatorname{Rng}(f)$ is a subset of $\mathbb{N}$. Thus $\operatorname{Rng}(f)$ has the least element; let us denote it by m. Since m belongs to $\operatorname{Rng}(f)$, there exists some n such that $f(n) = m$. However, the condition $f(f(n)) < f(n)$ must also hold for this n and since $f(n) = m$, we have $f(m) < m$. On the other hand $f(m)$ also belongs to $\operatorname{Rng}(f)$, which contradicts the fact that m is the least element of $\operatorname{Rng}(f)$.

Alternative Solution:

This time we will use the principle of infinite descent. As in previous solution, let us suppose that such function f exists. Take any positive integer c. We do not know whether $f(c) < c$ but we do know that $f(f(c)) < f(c)$. By plugging $n = f(c)$ into the given condition we obtain $f(f(f(c) < f(f(c))$. More generally, for all k in $\mathbb{N}$, $f^{(k+1)}(c) < f^{(k)}(c)$. It means that $f(c), f^{(2)}(c), f^{(3)}(c), \ldots$ is an infinite decreasing sequence, but such sequence doesn't exist in $\mathbb{N}$, which is a contradiction.

Poznámky:

Druhá úloha anglické série k mému překvapení zaskočila i mnoho ostřílených řešitelů, čemuž také odpovídá průměrné hodnocení 1,78 bodu.

Přestože většina řešitelů nakonec správně došla k negativnímu závěru, mnoho řešitelů automaticky předpokládalo, že pokud $f(f(n)) < f(n)$, tak určitě také $f(n) < n$ pro každé n. To ale vůbec nemusí být pravda. Pokud bychom hledali například funkci $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takovou, že $g(g(n)) < g(n)$ pro každé n ze $\mathbb{Z}$, ale pro některá n ze $\mathbb{Z}$ neplatí $g(n) < n$, určitě ji najdeme. Příkladem může být třeba funkce

$$g_1(n) = \begin{cases} \text{Nejbližší vyšší násobek 100, pokud } n \text{ není dělitelné 100,} \\ n - 100 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení, že $f(n) < n$ pro každé n, bylo často použito nepřímo pomocí substituce t za $f(n)$, která rozhodně **není** obecně správně. Tím spíše, chceme-li potom bez důkazu tvrdit, že t může nabývat nějaké konkrétní hodnoty. Řešení, která tak či onak toto tvrzení použila, jsem až na pár výjimek ocenil jedním bodem.

Někteří řešitelé se též snažili tvrdit, že taková funkce existuje. Nejčastěji při tom nabízeli funkce jako $f(x) = x - 1$ nebo $f(x) = \frac{x}{2}$. Bohužel pro ně ani jedna z těchto funkcí nemá jako svůj obor hodnot přirozená čísla (například funkční hodnota jedničky je v prvním případě nula, v druhém jedna polovina).

V několika řešeních jsem se setkal i s tvrzením, že všechny funkce lze popsat nějakým výrazem, jako například x, $x^5 - 1$ nebo $\sqrt{x}$. Taková řešení rozebrala pár druhů funkcí, které jejich autory napadly, a potom prohlásila, že žádné jiné funkce už neexistují. To také není pravda. Tuto výtku zde ale nebudu dále rozepisovat, protože k ní je poznámka již v povídání k této sérii nebo v o poznání obsáhlejším, avšak česky psaném povídání k třetí podzimní sérii 33. ročníku.

Na závěr bych chtěl poukázat na skutečnost, že ač to tak na první pohled nemusí vypadat, obě vzorová řešení jsou vlastně založena na té samé myšlence. Pouze nabízejí různé způsoby, jak o ní přemýšlet. Stejnou myšlenku využívala i všechna správná řešení. *(Viki Němeček)*

Problem 3.

Find a function $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that $f^{(n)}$ has exactly n roots for all positive integers n.

(David Hruška)

SOLUTION:

Let us partition all positive integers into disjoint sets M_m, $m \in \mathbb{N}$ such that each M_m contains m elements. One possible way to do this is to put $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4, 5, 6\}$ and so on. That is we begin with $M_1 = \{1\}$ and in general[3]

$$M_1 = \{1\}, \quad M_m = \{\max M_{m-1} + 1, \max M_{m-1} + 2, \max M_{m-1} + 3, \ldots, \max M_{m-1} + m\}\,.$$

Now we define a function $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that the roots of $f^{(n)}$ are exactly the elements of M_n for every $n \in \mathbb{N}$. The function is defined as follows:

$$f(k) = \begin{cases} -1, & \text{for } k \le 0, \\ 0, & \text{for } k \in M_1, \\ \max M_{m-1}, & \text{for } k \in M_m, m \ge 2. \end{cases}$$

Then for every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$f^{(n)}(k) = \begin{cases} -1, & \text{for } k \le 0 \text{ or } k \in M_m,\ m < n, \\ 0, & \text{for } k \in M_n, \\ \max M_{m-n}, & \text{for } k \in M_m, m > n, \end{cases}$$

since if $k \in M_m$, then $f(k) \in M_{m-1}$. Therefore the roots of $f^{(n)}$ are exactly the elements of M_n, so there are n of them.

POZNÁMKY:

Správná řešení se prakticky dala rozdělit do dvou skupin. První následovala myšlenku vzorového řešení. Druhá vsadila na funkci $f(k) = |k - 1|$ či nějakou její obměnu (často zapsanou jinak). Našlo se i několik řešitelů, kteří se pokoušeli najít funkci f ve tvaru polynomu. Ti bohužel uspět nemohli, jelikož polynom splňující podmínku v zadání neexistuje. To je, volně řečeno, proto, že polynom f stupně alespoň dva (polynom stupně jedna určitě zadání nesplňuje) nám čísla, která jsou dost daleko od nuly, posílá ještě dál od nuly. Tudíž v absolutní hodnotě dost velká čísla nemohou být kořenem žádného $f^{(n)}$, a proto pro velké n nemůže mít $f^{(n)}$ dost kořenů.

Nakonec bylo pár řešitelů, kteří nepochopili význam symbolu $f^{(n)}$. Proto bych rád připomněl, že pokud máme k sérii úvodní text, vyplatí se ho pečlivě přečíst. *(Tonda Češík)*

Problem 4.

Find all functions $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(Jakub Löwit)

SOLUTION:

Let us choose an arbitrary $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Then we can plug a and $\frac{1}{a}$ into x in our functional equation:

$$f(a) + 2f\left(\frac{1}{a}\right) = a,$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) + 2f(a) = \frac{1}{a}.$$

[3] The number $\max A$ is the largest element of the set A. So for example $\max M_3 = 6$.

We can easily solve this system of two equations by multiplying the second one by -2 and adding them together. Then we get

$$f(a) = \frac{2-a^2}{3a}.$$

Now we know that every function satisfying the functional equation must assign $\frac{2-x^2}{3x}$ to any x from its domain. However, we must verify that this function really is a solution:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2-x^2}{3x} + 2 \cdot \frac{2-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{3\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-x^2}{3x} + \frac{4x^2-2}{3x} = x.$$

Therefore $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ is a solution to the functional equation and it is the only one.

Poznámky:
Takřka všechna řešení se dobrala ke správnému předpisu funkce f. Někteří však zapomněli provést zkoušku nebo aspoň konstatovat, že všechny provedené úpravy rovnic byly ekvivalentní a platí pro každé a z definičního oboru. Pak totiž i bez zkoušky víme, že pro každé a musí platit také výsledný předpis a že tento předpis ekvivalentně vyhovuje i původní funkcionální rovnici. Takovým zapomnětlivcům jsem strhla jeden bod.

Nepříjemně mě překvapilo množství řešitelů, kteří špatně upravili rovnici nebo do závěru napsali jiný předpis pro f, než jaký našli o několik řádků výše. Pokud se správný výsledek jinde v textu vyskytoval a bylo jasné, že jde o překlep, body jsem nestrhávala. Ale chtěla bych zdůraznit, že taková nedbalost opravdu nepůsobí dobře.

Nakonec upozorním, že ač jsem se několikrát dočetla, že inverzní funkcí k $f(x)$ je $f\left(\frac{1}{x}\right)$, není tomu tak. *Inverzní funkce* k f je taková funkce f^{-1}, pro kterou platí $f^{-1}(f(x)) = x$. Například pro $f(x) = x^2$ je to tedy funkce, která x přiřadí $\sqrt{x}$, nikoli $\frac{1}{x^2}$.

(Bára Kociánová)

Problem 5.

Let $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a function that satisfies $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$. Show that f is nonincreasing.

(Pepa Svoboda)

Solution:
First, let us prove that $f(x) \le 1$ for all x.

Assume $f(c) > 1$ for some c. If we plug $(x, y) = (c, y)$ into our equation, we get

$$f(c)f(yf(c)) = f(c+y).$$

Now we can choose y in such a way that $c + y = yf(c)$ holds. This is possible by solving the linear equation for y. By doing so, we obtain $y = \frac{c}{f(c)-1}$. Both the numerator and the denominator are positive numbers from our assumptions, therefore we can plug this y into our functional equation. However, we have chosen y in such a way that we can divide both sides of the equation by (positive) number $f(yf(c)) = f(c+y)$:

$$f(c) = \frac{f(c)f(yf(c))}{f(yf(c))} = \frac{f(c+y)}{f(c+y)} = 1.$$

This contradicts our assumption $f(c) > 1$. Therefore, $f(x) \le 1$ for all positive x.

Now we prove that f is nonincreasing. In order to do that let us take positive numbers a and b such that $a < b$. Now if we plug $x = a$ and $y = b - a > 0$ into the original equation, we get

$$f(a)f((b-a)f(a)) = f(b).$$

We know that $f(x) \le 1$ for all positive x. Hence $f((b-a)f(a)) \le 1$ must hold as well and we conclude that $f(a) \ge f(b)$, as desired.

Poznámky:
Většina došlých řešení využívala tento nebo lehce obměněný postup. Upozornil bych především na to, že negací výroku „funkce f je nerostoucí" není výrok „funkce f je rostoucí" – funkce totiž může být na některých intervalech rostoucí a na některých ne. *(Marian Poljak)*

Problem 6.

Lucien had a dream about a nonzero polynomial P with nonnegative integer coefficients. If Áďa says an integer z, Lucien tells her the value $P(z)$. What is the lowest number of questions Áďa has to ask to be able to figure out what Lucien's polynomial is?

(Rado van Švarc)

Solution:

From the assumption P is a polynomial with nonnegative integer coefficients. Hence there is a natural number n and $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

We shall prove that the answer is two. To guess Lucien's polynomial Áďa's first wants to know the value of $P(x)$ at 1, thus obtaining the sum of all the coefficients of P. Because the coefficients are nonnegative, $P(1) + 1$ is strictly greater than each of them.

Now Áďa chooses natural number k, such that $10^k > P(1) + 1$ and asks for the value of $P(x)$ at 10^k. Let us denote it by m. Each of the coefficents has at most k digits and all the numbers $a_n 10^{kn}, a_{n-1} 10^{k(n-1)}, \ldots, a_1 10^k$ have at least k zeros at the end, so the last k digits of m will represent a_0. Numbers $a_n 10^{kn}, a_{n-1} 10^{k(n-1)}, \ldots, a_2 10^{2k}$ have at least $2k$ zeros at the end, so the next k digits of m represent a_1 and so on. Using this approach Áďa can determine every coefficient of Lucien's polynomial.

It remains to be proven that one question is not sufficent to determine the polynomial. Suppose Áďa's only question will be the value of $P(x)$ at l. If the answer is l^2 then there are at least two possible polynomials, namely the quadratic x^2 and the constant l^2, so Áďa can never guarantee to choose the right one.

Poznámky:
Někteří zapomněli na klíčovou podmínku, že koeficienty jsou nezáporná celá čísla, a proto jim vyšla odpověď $n + 1$, kde n je stupeň polynomů. Bohužel stupeň polynomů předem neznáme, a proto to nemůže být správné řešení. Dále, ačkoli je počet otázek překvapivě malý, je pořád potřeba ověřit, že jedna otázka nestačí. Vzhledem k tomu, že se jedná o nedílnou součást každého důkazu, kde hledáme minimum nebo maximum, strhl jsem za takovou nedbalost dva body.

Hlavní idea důkazu spočívá v tom, že nám první otázka dá horní mez pro koeficienty. Dále můžeme tyto koeficienty považovat za číslice v jednoznačném zápisu nějaké číselné soustavy.

(Anh Dung „Tonda" Le)

Problem 7.

A function $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ is said to be cruelstrict if $f^{(f(k))}(k) = k$ for all positive integers k. Prove that any cruelstrict function has at least $P(n) + 1$ fixed points, where $P(n)$ is the number of primes in $(\sqrt{n}, n\rangle$.

(Rado van Švarc)

Solution:
Let us consider a directed graph on n vertices that represent numbers $1, \ldots, n$. There is an edge from x to y if and only if $y = f(x)$. From every vertex there is one outgoing edge and there is at least one incoming edge to each vertex because

$$x = f^{f(x)}(x) = f(f^{f(x)-1}(x)),$$

where we define $f^0(x)$ as x. Consequently, there is exactly one incoming edge to each vertex because the number of outgoing edges is the same as the number of incoming edges (it is simply the number of edges).

We pick an arbitrary vertex and go along the only outgoing edge. Because the number of vertices is finite, after some number of steps we return to some vertex that we have visited earlier. Moreover, it has to be the vertex where we started (otherwise there would be a vertex with two incoming edges).

So the whole graph is a union of several cycles (some of which may be of length 1).

Lemma. *The length of the cycle divides every number in the cycle.*

Proof. Let's take an arbitrary vertex x and its predecessor on the cycle y. Then $f^{f(y)}(y) = y$, or $f^x(y) = y$. This means that if we start walking from vertex y along the edges and do x steps, we end up back in vertex y. So the length of the cycle must divide x.

Now we take any prime number $p \in (\sqrt{n}, n\rangle$. We know it is in some cycle and by the lemma its length must divide p, so it is either 1 or p. Suppose for the sake of contradiction that its length is p. Then, according to the lemma, every number in the cycle is divisible by p. But every vertex in the cycle represents different number, so we have p different multiples of p. That is a contradiction with the fact that number of multiples of p in the set $\{1, \dots, n\}$ is $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor < \sqrt{n} < p$.

Vertex that represents number p is therefore in a cycle of length one which means $f(p) = p$, so p is a fixed point. Moreover we know from the lemma that number 1 lies in a cycle of length 1 so it is a fixed point as well (and it is not equal to any of the previous numbers because it is not a prime).

Hence we found $P(n) + 1$ fixed points which concludes the proof.

Poznámky:

Všechna správná došlá řešení postupovala stejně jako řešení vzorové. Jediný rozdíl byl v tom, že většina z nich nepoužila pro představu funkce graf, nýbrž o jednotlivých krocích mluvila algebraicky. Například to, že do každého vrcholu vchází jedna hrana, odpovídá tomu, že zobrazení f je bijekce.

(Štěpán Šimsa)

Problem 8.

Let $f\colon \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ be a function given by $f(n) = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots(n-1)\sqrt{n}}}}$ for all positive integers $n > 1$. Prove that f is bounded by 3.

(Rado van Švarc)

Solution:

Let M be the set of ordered pairs natural numbers (m, n), for which $m \le n$. Let $g\colon M \to \mathbb{R}$ be a function given by $g(m, n) = \sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\dots(n-1)\sqrt{n}}}}$ for every pair $(m, n) \in M$. Let us prove that for every $(m, n) \in M$ the relation $g(m, n) < m + 1$ holds. Since $0 < f(n) = g(2, n)$, we'll be done after that.

We'll use a quite unusual form of induction, specifically for m going from n to 1. For $m = n$, we are to prove that $\sqrt{n} < n + 1$. That's obvious from $\sqrt{n} \le n$.

Now let $g(m, n) < m + 1$ for some $m > 1$. Then

$$g(m-1, n) = \sqrt{(m-1)g(m, n)} < \sqrt{m^2 - 1} < m$$

and that means we're done.

Sketch of "adult" solution (by Alexandr Jankov):
We're going to use some advanced arsenal now, specifically Jensen inequality and infinite sums. We will not always be perfectly rigorous, only main ideas will be shown.

After taking the logarithm of $f(n) < 3$ we'll get an equivalent inequality

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{2^{k-1}} < \ln 3.$$

Since all terms in this series are positive, it's enough to prove

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{2^{k-1}} < \ln 3.$$

Notice that (from formula for the sum of infinite geometric series) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Also let us mention that

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1+i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 3.$$

Since logarithm is a concave function we have from the infinite Jensen inequality

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{2^{k-1}} \leq \ln \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} \right) = \ln 3$$

and we're done.

Poznámky:
Ačkoliv úloha nebyla přímo jednoduchá, byla dosti „datelná“ a dala se celkem rozumným způsobem „umlátit“. Nakonec ovšem žádné řešení nebylo natolik ošklivé, abych byl nucen dát mu $-i$. Na druhou stranu bylo rozdáno několik $+i$ za řešení podobná prvnímu vzoráku. *Alexandr Jankov* poslal dvě řešení (která jsou výše obě uvedena), z nichž druhé se mi líbilo natolik, že jsem k již udělenému $+i$ za řešení dle prvního vzoráku přidal další $+i$, čímž bylo po dlouhé době opět uděleno hodnocení $5 + 2i$.

Rád bych řešitele upozornil na to, že při práci s nekonečnými řadami není vždy povoleno libovolně přeskládávat a uzávorkovávat členy, obzvlášť pokud jsou mezi nimi kladná i záporná čísla. Nakonec jste vždy dělali jen změny, které vlastně povolené jsou (ačkoliv jste to obvykle neodůvodňovali), a tak jsem se za to rozhodl body nestrhávat. Koneckonců, já to ve vzoráku taky z důvodu přehlednosti nedělal. *(Rado van Švarc)*

Rozdělování

1. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

V lese je několik mravenišť. Hloubavý biolog si do notýsku zapsal množství mravenců v každém mraveništi, čímž získal k různých nenulových hodnot. Potom se ale do lesa přestěhoval zlý mravenečník, který každý den snědl jednoho mravence z každého mraveniště, ve kterém ještě nějací mravenci zbývali. Každý den si poznamenal, kolik jich snědl, přičemž nuly z lenosti nezapisoval. Ukažte, že jím napsaná čísla nabývají právě k různých hodnot.[4]

(David Hruška)

Řešení:
Počty snědených mravenců v jednotlivých dnech tvoří nerostoucí posloupnost a mění se, právě když se mění počet nedojedených mravenišť. Tato situace nastane právě jednou pro každé číslo v biologově zápisníku (tj. pro každou ze zastoupených hodnot velikostí mravenišť), protože stejně velká mraveniště se vyprázdní ve stejný den. Počet snědených mravenců (neboli počet neprázdných mravenišť) se tedy k-krát změnil, čili v průběhu celého mravenečníkova pobytu v lese nabýval právě $k + 1$ hodnot. Poslední z nich je ale nulová, takže si mravenečník zapsal právě k různých hodnot.

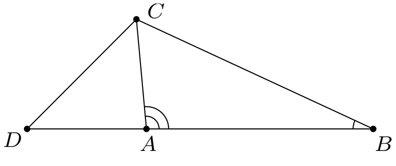
Poznámky:
Nejprve bych se rád omluvil za nejasné zadání úlohy. Sousloví „ … čímž získal k různých nenulových hodnot“ z první věty zadání se totiž zřejmě dá interpretovat dvěma způsoby. Jednak tak, že mravenišť je opravdu k a jsou různě velká, jednak tak, že mravenišť může být více než k a počty mravenců v nich se mohou opakovat. Posledně jmenovaný význam byl ten námi zamýšlený, řešitelé se ale v této otázce rozdělili na dvě zhruba stejně velké části. Vzhledem k tomu jsem uznával obě interpretace zadání. Ve druhém (původně zamýšleném) případě je úloha obecnější a dle mého soudu relativně o dost zajímavější, řešení je na druhou stranu v obou případech takřka totožné.

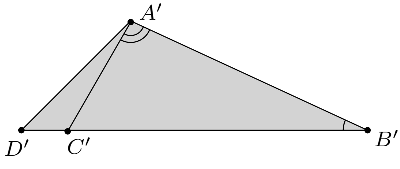
(David Hruška)

Úloha 2.

Máme bílý a černý trojúhelník, které jsou si podobné. Oba rozdělíme na dva trojúhelníky. Jeden ze vzniklých bílých trojúhelníků je podobný jednomu černému. Musí být podobné i zbylé dva?

Řešení:
Správná odpověď je, že si trojúhelníky podobné být nemusejí. Stačilo najít jeden protipříklad.





[4] Mravenci se nerozmnožují.

Vezměme trojúhelníky jako na obrázku. Trojúhelníky BCD a $B'A'D'$ jsou si podobné a trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ taktéž, kdežto trojúhelníky DAC a $D'C'A'$ si podobné nejsou, neboť trojúhelník DAC je ostroúhlý, zatímco trojúhelník $D'C'A'$ tupoúhlý.

POZNÁMKY:
Řešení přišla spousta a většina byla správně. Uznala jsem všechna řešení, kde autor našel konkrétní případ vzájemně nepodobných trojúhelníků nebo kde si uvědomil, že ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník nemohou být podobné. Ti, kteří se naopak snažili dokázat, že odřezky trojúhelníků podobné být musejí, si neuvědomili, že řezy můžeme vést různými směry. *(Adéla Kostelecká)*

Úloha 3.

V zemi je $n \geq 2$ měst a každá dvě jsou spojena silnicí. Dva silničáři Syp a Posyp je mají za úkol posypat štěrkem, ale jsou líní, a proto si práci rozdělí tak, aby:

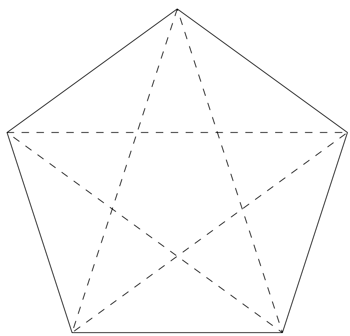
(1) *Každou silnici prošel právě jeden z nich.*
(2) *Oba skončili v tom městě, ve kterém začali, a mezitím do něj nevkročili.*
(3) *Každý po cestě navštívil každé město kromě počátečního právě jednou.*

Kolik měst v zemi bylo?

(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:
Silničář do každého města po nějaké cestě přišel, a po nějaké jiné z něj odešel, a to vždy právě jednou. Totéž platí i pro počáteční město, jen v opačném pořadí. Protože máme silničáře dva a posypali všechny silnice, z každého města vedou právě čtyři cesty. Nakonec víme, že v naší zemi je každé město spojeno se všemi ostatními cestou, čili žijeme v zemi s pěti městy.

Příkladem jsou města umístěná ve vrcholech pětiúhelníku, která Syp obejde po obvodu a Posyp po úhlopříčkách, tedy po hranách pěticípé hvězdy.



POZNÁMKY:
Úloha byla jednoduchá, takřka všichni ji vyřešili. Pár nesprávných řešení bylo nejspíš způsobeno nepozorností při čtení zadání. Chtěla bych pochválit ty, kteří kromě správného okomentování, že měst může být jedině pět, náčrtkem či popisem tras cestářů dokázali, že jsou pak opravdu splněny všechny podmínky. Kdyby se zadání ptalo, pro kolik měst se silničářům mohlo podařit rozdělit si práci, byla by to nepostradatelná součást řešení. *(Bára Kociánová)*

Úloha 4.

Myška si koupila 2017 ne nutně stejných kousků sýra. Ukažte, že nějaký z nich mohla rozříznout na dvě části a vzniklých 2018 kousků rozdělit do dvou skupin, které budou mít stejný počet dílků i stejnou hmotnost.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Seřaďme si jednotlivé kousky sýra dle velikosti a jejich hmotnosti označme postupně od nejlehčího sýra x_1 až po nejtěžší x_{2017}. Nyní rozdělme prvních 2016 sýrů do dvou skupin tak, že do první skupiny dáme sýry s lichým indexem a do druhé se sudým. Hmotnost první skupiny označme m_1, hmotnost druhé m_2. Ze způsobu rozdělení sýrů plyne, že $m_2 \geq m_1$. Nyní nám stačí dokázat, že $x_{2017} > m_2 - m_1$. Poté budeme schopni rozdělit poslední, nejtěžší kousek sýra na dva tak, aby kousek daný do první skupiny měl hmotnost o $m_2 - m_1$ větší než ten daný do druhé skupiny.

Rozdíl hmotností skupin můžeme vyjádřit jako $m_2 - m_1 = x_2 - x_1 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{2016} - x_{2015}$. Dále platí

$$\begin{aligned} 0 &< x_1, \\ x_2 &\leq x_3, \\ &\vdots \\ x_{2016} &\leq x_{2017}. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 + \cdots + x_{2016} &< x_1 + x_3 + \cdots + x_{2017}, \\ x_2 - x_1 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{2016} - x_{2015} &< x_{2017}, \end{aligned}$$

tedy $m_2 - m_1 < x_{2017}$.

Protože je rozdíl $m_2 - m_1 < x_{2017}$, můžeme poslední kousek rozdělit na dva o hmotnostech $\frac{1}{2}(x_{2017} - (m_2 - m_1))$ a $\frac{1}{2}(x_{2017} + (m_2 - m_1))$, a tedy rozdělit sýry do dvou stejně hmotných skupin se stejným počtem sýrů.

Poznámky:

Úloha byla pro většinu řešitelů pětibodovou. Řešení byla založena na rozmisťování kousků do hromádek. Často se vyskytovala řešení, ve kterých se přehazovaly dvojice sýrů mezi hromádkami. Taková řešení jsem hodnotil plným počtem bodů, když dotyčný dostatečně vysvětlil svůj algoritmus a to, že je schopen získat prohazováním rozdíl hmotností skupin menší, než jaká je hmotnost nejtěžšího kousku sýra. Pokud tento důkaz chyběl, nebo byl nedostatečný či nejasný, strhával jsem bod až dva. Řešení, která se věnovala pouze jednomu nějakému speciálnímu případu bez náznaku algoritmu či postupu, jsem hodnotil nulou. *(Jan Kadlec)*

Úloha 5.

Dokažte, že když jakkoliv rozdělíme přirozená čísla do konečně mnoha skupin, pak alespoň v jedné z nich bude nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla.

(Honza Krejčí)

Řešení:

Množinu přirozených čísel rozdělíme do n skupin, které označíme S_i $(1 \leq i \leq n)$. Pro spor předpokládejme, že v každé skupině S_i existuje přirozené číslo t_i takové, že S_i obsahuje jen konečně násobků tohoto čísla. Označíme si K součin všech těchto čísel t_i. Násobků K je zřejmě v každé ze skupin konečně mnoho (protože jsou to zároveň násobky t_i). Jelikož skupin je konečně mnoho, tak přirozená čísla obsahují jen konečně mnoho násobků čísla K, což je spor s tím, že přirozená čísla obsahují nekonečný počet násobků každého přirozeného čísla.

Poznámky:
Úlohu se většině řešitelů podařilo bez problémů vyřešit. Způsobů řešení bylo hned několik, většina řešitelů se rozhodla pro důkaz sporem. Několik řešitelů dokázalo, že některá ze skupin musí být nekonečná, z toho ale bohužel neplyne, že obsahuje nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla (protipříkladem je například skupina prvočísel, která neobsahuje nekonečný počet násobků žádného přirozeného čísla). *(Lucien Šíma)*

Úloha 6.

Jedenáct organizátorů schovalo do trezoru zadání letošního myšmaše. Zamkli ho na n zámků a každý z nich si vzal několik klíčů. Jeden klíč si mohlo vzít víc organizátorů. Přitom chtěli, aby každá šestice byla schopna otevřít trezor (tedy odemknout všechny jeho zámky), ale žádná pětice se dovnitř nedostala. Kolik nejméně zámků potřebovali?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Podle zadání každé pětici musí chybět alespoň jeden klíč. Pokud by dvěma různým péticím chyběl stejný klíč, znamenalo by to, že by i všem orgům ze sjednocení oněch pětic chyběl onen klíč. Ale orgů ve sjednocení těchto pětic je aspoň 6, což je spor. To znamená, že klíče chybějící péticím jsou unikátní pro každou pětici.

Tedy počet zámků můžeme zdola omezit na $\binom{11}{5} = 462$.

Tolik zámků také stačí. Za každou pětici přidáme jeden zámek a všem orgům, kteří v této pětici nejsou, dáme klíč. Pro každou šestici a každý zámek potom platí, že v šestici existuje někdo, kdo od něj má klíč, protože existuje jen pět orgů, kteří ho nemají.

Poznámky:
Úloha nebyla těžká, většinou jsem za ní rozdával plný počet bodů. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 7.

Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen n-úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný.

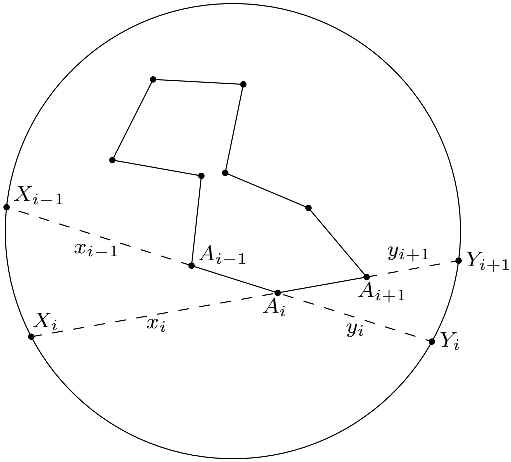
(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme si vrcholy našeho n-úhelníku jako $A_1, A_2, \dots, A_n$. Všechny indexy budeme brát modulo n. Pro každé i si průsečíky přímky A_iA_{i+1} s pobřežím označíme jako X_i a Y_{i+1} tak, že X_i, A_i, A_{i+1} a Y_{i+1} leží na přímce v tomto pořadí. Dále si označme délky úseček A_iX_i a A_iY_i jako x_i a y_i.

BÚNO nechť náš n-úhelník má strany délky 1. Z mocnosti bodu A_i ke kružnici, která tvoří pobřeží, plyne $|X_{i-1}A_i||A_iY_i| = |X_iA_i||A_iY_{i+1}|$, neboli $(x_{i-1}+1)y_i = x_i(1+y_{i+1})$. To můžeme přepsat jako $x_{i-1}y_i + y_i = x_iy_{i+1} + x_i$. Pokud sečteme všechny tyto rovnosti přes všechna i a od obou stran odečteme $\sum_{i=1}^n x_iy_{i+1}$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Nyní rozdělíme ptakopysky podle toho, zdali se po A_iA_{i+1} vydávají do A_i, nebo do A_{i+1}. Každá ze skupin nejprve v součtu ujde $\frac{n}{2}$, po čemž se všichni ptakopysci dostanou do vrcholů mnohoúhelníku. Ptakopysk jdoucí po A_iA_{i+1} následně ujde x_i, respektive y_{i+1}, podle toho, jestli patří do první, či druhé skupiny. Ale to znamená, že první skupina v součtu ujde $\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i$ a druhá $\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n y_i$, což jsou stejná čísla.



Poznámky:
Řešení se sešlo vcelku pomálu. Všechna správná víceméně kopírovala vzorák. Řešení se může zdát trikové, ale není to tak strašné – tipnout správné rozdělení šlo celkem dobře intuitivně, z čehož jednoduše vyšel metrický vztah. A metrické vztahy vzhledem ke kružnici takřka vždy ukazují na mocnost. *(Rado van Švarc)*

Úloha 8.

V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídit 2017 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2017 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu.

(Anh Dung „Tonda" Le)

Řešení:
Úlohu si převedeme na hledání největšího párování[5] v bipartitním grafu. Tento graf vytvoříme tak, že vezmeme jako jednu partitu okresy v jednom návrhu a jako druhou partitu okresy v druhém. Hrana povede mezi dvěma vrcholy právě tehdy, když příslušné navržené okresy mají průnik s nenulovým obsahem. Graf si označíme G.

Nyní si všimneme, že pokud najdeme v tomto grafu párování obsahující všechny vrcholy, tak můžeme pro každé dva spárované okresy (které budou nutně z různých návrhů) postavit okresní úřad právě v jejich průniku. Vzhledem k tomu, že mezi nimi vede hrana, je tento průnik z definice G neprázdný.

Toto párování nalezneme pomocí Hallovy věty. Ta říká, že bipartitní graf s partitami A a B má párování obsahující všechny vrcholy partity A právě tehdy, když každá podmnožina F vrcholů partity A je spojena hranami s alespoň $|F|$ vrcholy B. V našem případě tedy musíme ukázat, že libovolná množina F okresů z jednoho návrhu zasahuje do alespoň $|F|$ okresů z návrhu druhého.

Označíme si S plochu každého okresu (ta je stejná pro oba návrhy, protože je rovna $\frac{1}{2017}$ plochy celého PraSeStánu). Pro spor připusťme, že existuje podmnožina F okresů z jednoho návrhu, která zasahuje do nejvýše $|F|-1$ okresů návrhu druhého. To by ale znamenalo, že se všechny okresy z F,

[5] Párováním rozumíme podmnožinu množiny hran grafu takovou, že žádné dvě její hrany nemají společný vrchol. Největší párování M je párování takové, že každé párování v G má nejvýše $|M|$ hran.

jejichž plocha je dohromady $S \cdot |F|$, vejdou do nejvýše $|F| - 1$ okresů z druhého návrhu. Plocha těchto nejvýše $|F| - 1$ okresů je ale nejvýše $S \cdot (|F| - 1)$, což je méně než $S \cdot |F|$. To je hledaný spor.

V G tedy existuje párování obsahující všechny vrcholy jedné partity. Protože jsou ale partity stejně velké, obsahuje toto párování všechny vrcholy.

Alternativní řešení (podle Ákose Záhorského):

Stejně jako v předchozím řešení převedeme úlohu na hledání párování obsahujícího 2017 hran.

Využijeme Königovu větu. Ta říká, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího pokrytí[6]. Nyní tedy nechť pro spor existuje v G pokrytí o nejvýše 2016 vrcholech. Tedy existuje nejvýše 2016 okresů (ne nutně všechny z toho samého návrhu) takových, že obsahují každou oblast, které odpovídá nějaká hrana. Tyto okresy však každou oblast, které odpovídá nějaká hrana, obsahují buď celou, nebo vůbec. Protože však mají dohromady plochu nejvýše $2016S$, existuje plocha velká alespoň S, která není žádným z nich pokrytá. Protože ale každé místo pokrývají okresy z obou návrhů, i v této ploše je nějaká oblast odpovídající hraně v G, což je hledaný spor.

Poznámky:

Téměř všechna řešení, která nám přišla, kopírovala vzorák. Jediné správné řešení, které nevyužívalo Hallovu větu, bylo řešení *Ákose Záhorského*, který za něj byl oceněn jedním imaginárním bodem.

(Viki Němeček)

[6]Pokrytí je taková podmnožina C množiny vrcholů grafu G, že pro každou hranu G je v C alespoň jeden její koncový vrchol.

Geometrie trojúhelníka 2

2. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Nechť I_A a I_C jsou postupně A-připsiště a C-připsiště trojúhelníka ABC. Na kružnici jemu opsané zvolme libovolný bod P různý od B. Dokažte, že střed úsečky, jejíž krajní body jsou opsiště trojúhelníků I_ABP a I_CBP, je opsištěm trojúhelníka ABC.

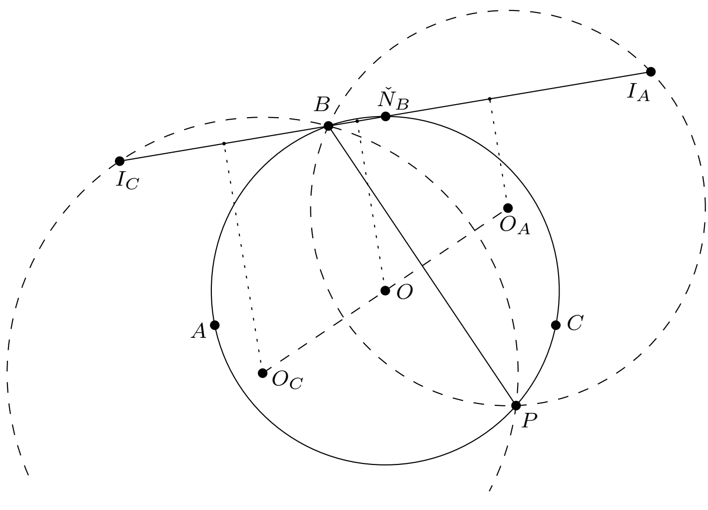
(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme si opsiště trojúhelníků ABC, I_ABP a I_CBP jako O, O_A a O_C. Dále buď $\check{N}_B$ antišvrk příslušný bodu B v trojúhelníku ABC. Prvně si povšimněme, že BP je tětivou kružnic opsaných trojúhelníkům ABC, I_ABP i I_CBP, a proto leží O, O_A i O_C na jedné přímce – na ose úsečky BP.

Dále si uvědomme, že O, O_A a O_C leží na osách úseček $B\check{N}_B$, BI_A a BI_C. Protože B, $\check{N}_B$, I_A i I_C leží na jedné přímce, jsou všechny tyto osy rovnoběžné. Protože už víme, že O, O_A a O_C leží na jedné přímce, stačí ukázat, že osa $B\check{N}_B$ je osou pásu určeného osami BI_A a BI_C.

Pokud na tyto tři osy aplikujeme stejnolehlost se středem v B a koeficientem 2, dostaneme k dokázání, že kolmice na I_AI_C v $\check{N}_B$ je osou pásu z kolmic na tu samou přímku v bodech I_A a I_C. Ale to je pravda, protože $\check{N}_B$ je střed I_AI_C.



Poznámky:

Sešla se plejáda správných řešení založených na spoustě různých přístupů a pohledů. Všechna však zakládala na nějaké technice ze seriálu, obvykle na Švrčkově bodu nebo antišvrku. Objevila se ale třeba i řešení založená na Eulerově přímce a Feuerbachově kružnici.

Taky bych rád podotknul, že ačkoli zadání zakazovalo patologický případ $P = B$, nevylučovalo jiný patologický případ $P = \check{N}_B$. V tu chvíli totiž trojúhelníky I_ABP a I_CBP zdegenerují do úseček. Tvrzení je sice stále pravdivé, ale jen ve chvíli, kdy se smíříme s tím, že středem kružnice opsané může být i bod ležící v nekonečnu.[7] Za tuto nedokonalost zadání se omlouváme. Body jsem kvůli ní nikomu nestrhával.

(Rado van Švarc)

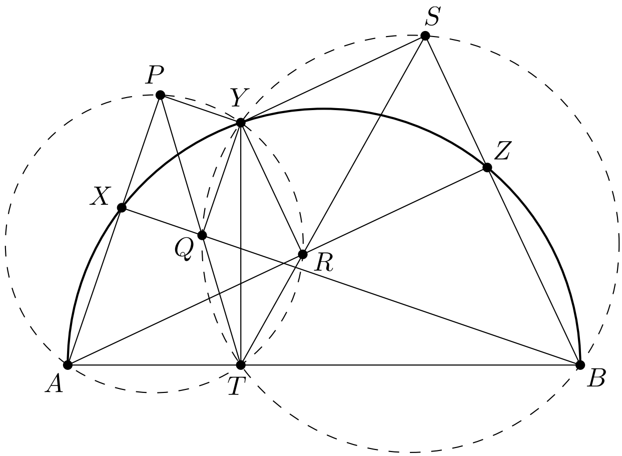
Úloha 2.

Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Označme postupně P, Q, R, S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ, kde O je střed úsečky AB.

(Rado Švarc)

Řešení:

Nechť T je pata kolmice spuštěné z bodu Y na AB. Body T, P, Q leží na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímku bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABX. Analogicky leží body T, R, S na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímku bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABZ.



Díky pravým úhlům leží body A, Y, R, T na Thaletově kružnici nad průměrem AY, tudíž $|\sphericalangle YTR| = |\sphericalangle YAR| = |\sphericalangle YAZ|$. Podobným způsobem dostaneme $|\sphericalangle QTY| = |\sphericalangle QBY| = |\sphericalangle XBY|$. Nyní využijeme faktu, že $AXYZB$ je tětivový pětiúhelník. Úhel QTR jakožto součet úhlů QTY a YTR je tedy součtem obvodových úhlů příslušných obloukům XY a YZ. To dohromady dává obvodový úhel oblouku XZ, což je polovina středového úhlu XOZ.

Poznámky:

Úloha byla jednoduchá, a proto naprostá většina došlých řešení byla správná. Chtěl bych pochválit řešitele, kteří použili Simsonovu přímku, čím si své řešení dosti zjednodušili a zkrátili oproti jiným úhlícím řešením.

Jiný postup, který se mi velice líbil, využíval stejnolehlost se středem Y a koeficientem 2. Nafoukneme-li pouze přímky PQ a RS, jejich obrazy obsahují po řadě body X a Z. Zároveň obraz

[7] Koho zmínka o bodech ležících v nekonečnu zaujala, ten si může přečíst něco o *projektivní rovině.*

bodu T padne na kružnici opsanou trojúhelníku XYZ, což okamžitě dává kýžený výsledek. Tímto postupem si *Victoria María Nájares Romero* a *Martin Zimen* vysloužili $+i$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 3.

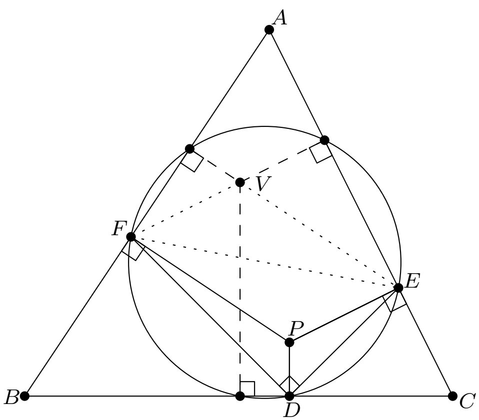
Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Paty kolmic z bodu P na strany BC, CA a AB označme postupně D, E a F. Dále nechť V je kolmiště trojúhelníku AEF. Dokažte, že pokud $DE \perp DF$, pak platí

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BVC| = 180^\circ + \alpha.$$

(Rado van Švarc)

Řešení:

Podle Six feet theorem[8] sdílí trojúhelník tvořený patami kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC kružnici opsanou s trojúhelníkem s vrcholy v analogických patách kolmic vedených kamarádem bodu P. Jelikož je úhel EDF pravý, je podle Thaletovy věty úsečka EF průměrem této kružnice. Uvažme paty kolmic z kamaráda bodu P postupně na strany AC a AB. Vzhledem k výše uvedenému to musejí být průsečíky kružnice nad průměrem EF s příslušnými stranami různé od bodů E a F. To jsou ale zároveň paty dvou výšek v trojúhelníku AEF. Z toho plyne, že kamarádem bodu P musí být bod V. Zbytek řešení je obsažen v následujícím lemmatu.



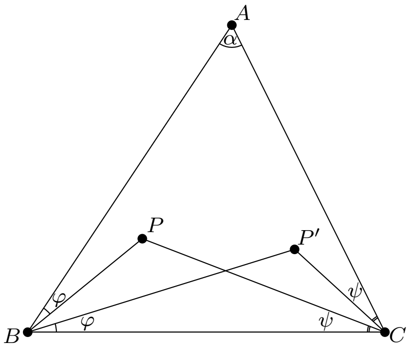
Lemma. *Nechť P a P' jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. Pak platí $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C| = 180^\circ + \alpha$ a analogicky $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle AP'C| = 180^\circ + \beta$ a $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle AP'B| = 180^\circ + \gamma$.*

Důkaz. Podívejme se na druhý obrázek. Dvojice stejně velkých úhlů (jelikož P a P' jsou kamarádi) u vrcholů B a C označíme φ a ψ. Součet $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C|$ pak můžeme vyjádřit jako

$$(180^\circ - |\sphericalangle PBC| - \psi) + (180^\circ - |\sphericalangle P'CB| - \varphi) = 360^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ + \alpha,$$

což jsme měli dokázat.

[8] Tvrzení 54 z druhého dílu seriálu.



Poznámky:

Zhruba polovina z celkových čtrnácti úspěšných řešitelů této úlohy použila podobný postup jako my zde. Ze zadání ale plyne ještě víc. Úhel BPC má totiž velikost $90^\circ + \alpha$, a tedy úhel BVC musí být nutně pravý! To je jistě zajímavé a dá se to s trochou námahy elementárně dokázat, o čemž se přesvědčila druhá zhruba polovina řešitelů. Ještě dodáme, že v námi použitém lemmatu platí dokonce ekvivalence, tedy uvedené tři vztahy pro úhly platí právě tehdy, když jsou P a P' kamarádi. *(David Hruška)*

Geometrie trojúhelníka 3 – Trojúhelník vrací úhel

Hamiltonova kružnice se dotýká Pascalova trojúhelníku v bodě varu. – neznámý autor

Vítejte u dalšího dílu seriálu. V tomto díle už budeme skutečně pracovat s těžkým kalibrem. Začneme pokračováním z minulého dílu, povídáním o Lemoinově bodě a Tuckerových kružnicích. Zadefinujeme Gergonnův a Nagelův bod a vyslovíme další kamarádská tvrzení. Potom nás bude čekat Ponceletovo porisma, které následně rozšíříme na obecnější tvrzení (stále zvané Ponceletovo porisma). Zakončíme formulací Feuerbachovy věty, kterou rozšíříme na takzvanou třetí Fonteného větu. Tu pak společně s prvními dvěma dokážeme.

Lemoinův bod

Minulý díl jsme zakončili zkoumáním symedián a slíbili jsme si něco říct o jejich průsečíku – Lemoinově[9] bodu, jenž značíme K. Než se do toho pustíme, připomeneme si krátce symediány, neboť je budeme hodně používat.

Tvrzení. (Opakování o symediánách) *Je dán trojúhelník ABC. Izogonály (přímky osově souměrné podle příslušných os úhlů) k těžnicím se nazývají symediány a protínají se v Lemoinově bodě. Symediána z bodu A (a-symediána) je množinou středů všech antirovnoběžek (jakožto úseček s krajními body na přímkách AB a AC) se stranou BC (vůči úhlu BAC). Také je množinou všech takových bodů roviny, jejichž poměr vzdáleností od přímek AB a AC je roven $\frac{|AB|}{|AC|}$.*

Cvičení. Ke stranám AB a AC trojúhelníka ABC připíšeme zvenku čtverce a průsečík jejich stran rovnoběžných s přímkami AB a AC (ale různých od nich) označíme X. Dokažte, že X leží na a-symediáně.

Návod. Bod X má správný poměr vzdáleností od AB a AC.

Teď už nám[10] nic nebrání pustit se do Lemoinova bodu.

Tvrzení. (Kosinová kružnice) *Když bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami, vytnou na stranách trojúhelníka (přesněji na přímkách jimi určených) šestici bodů ležících na jedné kružnici. Středem této kružnice je bod K.*

Důkaz. Z opakovacího tvrzení víme, že K leží ve středu všech tří antirovnoběžek. Stačí tedy dokázat, že průsečíky antirovnoběžek s AB a AC se stranou BC tvoří spolu s K rovnoramenný trojúhelník. To je ale jasné díky antirovnoběžkám – oba vnitřní úhly zmíněného trojúhelníka při straně ležící na BC mají velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Analogická tvrzení platí pro zbylé dvě antirovnoběžky a my vidíme, že K je skutečně od všech šesti bodů stejně vzdálený.

[9] Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik. Máme ho rádi.

[10] A vám snad také ne.

Cvičení. Dokažte, že šest bodů z posledního tvrzení leží uvnitř stran, právě když je daný trojúhelník ostroúhlý.

Návod. Zkoumejte limitní případ, kdy je nějakou z antirovnoběžek z minulého tvrzení přímo symediána. Zbývá dokázat nerovnost pro úhel u symediány (ten je z definice roven nějakému úhlu u těžnice) v ostroúhlém trojúhelníku.

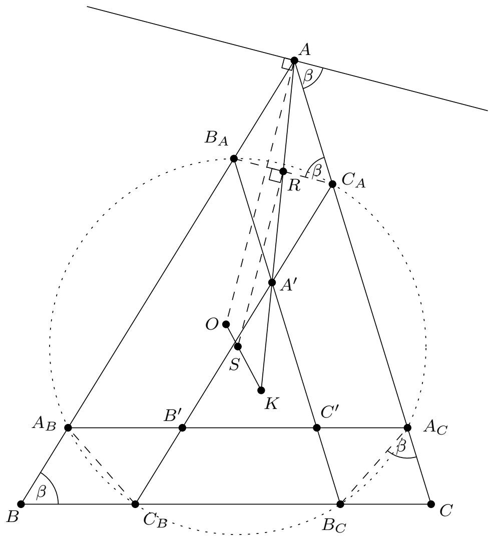
Cvičení. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku leží Lemoinův bod na některé výšce.

Cvičení. (těžší) Ukažte, že trojice úseček spojujících střed strany se středem odpovídající výšky prochází Lemoinovým bodem.

Návod. Ukažte, že každá z přímek je množina středů obdélníků vepsaných do ABC ležících na jedné ze stran. Rozmyslete si, že všechny vepsané obdélníky ležící na BC dostanete aplikováním vhodné stejnolehlosti se středem v A na nějaký obdélník zvenku připsaný ke straně BC, jehož střed umíte dobře popsat. Dopočítejte. Také se dá rovnoměrně hýbat s jedním vrcholem BÚNO po AB a nahlédnout, že střed obdélníka se pohybuje po správné úsečce. Nakonec použijte kosinovou kružnici.

Tvrzení. (Tuckerovy kružnice) *Uvažme vhodnou*[11] *stejnolehlost se středem v K a obrazy přímek AB, BC a CA v ní. Ty vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů ležících na kružnici, jejíž střed leží na úsečce OK. Takové kružnice nazýváme Tuckerovy kružnice.*

Důkaz.



Označme si průsečíky podle obrázku. Čtyřúhelník $AB_AA'C_A$ je zřejmě rovnoběžník, takže úsečka B_AC_A je rozpůlena a-symediánou. Z toho plyne, že je to antirovnoběžka s BC. Vskutku, nechť B_AX je antirovnoběžka s BC a X leží na AC. Pak i B_AX je rozpůlena a-symediánou (opakovací tvrzení), z čehož plyne, že XC_A je rovnoběžná s a-symediánou, čili musí být $X = C_A$. S pomocí tohoto a analogických tvrzení jsou všechny tři „rohové“ trojúhelníčky (AB_AC_A a další dva) podobné

[11] Omezíme se jen na takové případy, v nichž každá z těchto zobrazených přímek protíná strany (úsečky) trojúhelníka ABC právě ve dvou bodech. Koeficient stejnolehlosti budeme tedy uvažovat z intervalu $\langle x, 1)$, kde x je vhodné záporné číslo. Nakreslete si v Geogebře.

trojúhelníku ABC. Speciálně je čtyřúhelník $B_A C_A A_C B_C$ rovnoramenný lichoběžník, tedy jeho vrcholy leží na jedné kružnici, a analogicky pro zbylé dvě strany.

Nabízí se otázka, zda už je z toho jasné, že všech šest bodů leží na jedné kružnici. Úplně jasné to není, ale pomůžeme si jednoduchým trikem. Dejme tomu, že by se ve skutečnosti jednalo o tři různé kružnice (zřejmě nemohou být právě dvě různé). Pak ale chordály jejich dvojic jsou přímky AB, BC a CA. Ty se mají podle tvrzení o potenčním středu protínat, což ale evidentně neplatí. Takže musí být všechny tři kružnice shodné a jsme hotovi, co se týče koncykličnosti.

Nyní uvažme stejnolehlost se středem v K takovou, že obraz bodu A je střed rovnoběžníka $AB_A A' C_A$ (označme jej R) a označme S obraz opsiště O v ní. Obraz tečny ke kružnici opsané ABC vedené bodem A je přímka $B_A C_A$, protože první z nich prochází bodem A, druhá bodem R a obě jsou antirovnoběžné s BC (u tečny to plyne z úsekového úhlu). Dále AO se zobrazí na RS (z definice), a tedy RS je kolmice na $B_A C_A$ procházející jejím středem, čili je to osa úsečky $B_A C_A$. Analogicky bychom dokázali, že S leží i na dalších osách, takže S je středem naší Tuckerovy kružnice.

Důsledek. (Lemoinova kružnice) *Rovnoběžky se stranami vedené bodem K vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů, které leží na jedné kružnici, kterou nazýváme Lemoinova kružnice.*[12] *Její střed je středem úsečky OK.*

Důkaz. Je to Tuckerova kružnice pro „koeficient stejnolehlosti rovný nule“. Přísně vzato by taková stejnolehlost všechny tři přímky zobrazila do bodu K. My ji ale v tomto případě bereme tak, že je posune do nulové vzdálenosti od K, tedy uvažujeme trojici rovnoběžek se stranami vedených bodem K. Její existence by se dokázala zcela analogicky jako v případě Tuckerových kružnic (onu stejnolehlost jsme používali pouze na rovnoběžnost se stranami, takže úvahy o rovnoběžnících atd. projdou úplně stejně). Jelikož v našem případě splývá bod A' z minulého důkazu s bodem K, musí mít stejnolehlost použitá v jeho poslední části koeficient $\frac{1}{2}$, z čehož plyne, že její střed leží uprostřed úsečky OK.

Na tvrzení o Tuckerových kružnicích lze pohlížet i jinak. V důkazu jsme nakreslili nějaké rovnoběžky se stranami a dokázali, že spojnice jejich průsečíků jsou antirovnoběžky (s něčím, viz důkaz a obrázek). Vytvořili jsme tedy šestiúhelník (přesněji uzavřenou lomenou čáru o šesti úsecích), který dvakrát „objede“ obvod trojúhelníka a je tvořen střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. To vede k následující formulaci tvrzení o Tuckerových kružnicích.

Cvičení. (Tuckerův magický šestiúhelník[13]) Zvolme bod na obvodu trojúhelníka. Konstruujme lomenou čáru s vrcholy na sousedních stranách po směru hodinových ručiček, jejíž úseky jsou střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. Předpokládejme, že celá leží uvnitř trojúhelníka. Dokažte, že tato lomená čára se po šesti úsecích uzavře a její vrcholy leží na kružnici se středem na úsečce OK.

Návod. Stačí dokázat, že „rovnoběžkové části“ lomené čáry se protínají na symediánách. Z toho už plyne, že jsme je mohli obdržet z přímek AB, BC a CA pomocí vhodné stejnolehlosti se středem v K. Tím jsme převedli úlohu na tvrzení o Tuckerových kružnicích. První zmíněnou vlastnost ale snadno dostaneme z obrácené úvahy o rovnoběžníku – jeho vrchol a střed úhlopříčky (antirovnoběžka) leží na symediáně, tedy tam leží i jeho protější vrchol.

Na této formulaci je pozoruhodné, že Lemoinův bod K se objeví až při zkoumání středu výsledné kružnice – konstrukce lomené čáry ho nijak nepoužívá.

---

[12] Terminologie kolem Lemoinovy a kosinové kružnice kolísá. Například v angličtině převažuje po řadě First Lemoine Circle a Second Lemoine Circle, v češtině se jim někdy říká první a druhá Lemoinova kružnice, avšak naopak.

[13] Název je odvozen od notoricky známého kabaretního triku, ve kterém iluzionista vyzve diváka, aby ve zcela obyčejném trojúhelníku začal dokola po jeho obvodu kreslit střídavě rovnoběžky a antirovnoběžky.

Je dobré si uvědomit, jaké speciální případy Tuckerových kružnic už známe. Pokud zvolíme stejnolehlost s koeficientem 1 (což striktně vzato nesmíme, ale je to limitní případ), zdegenerují antirovnoběžky do bodů a výsledkem bude samotný obvod trojúhelníka, potažmo jeho kružnice opsaná. Pro „nulový koeficient“ dostaneme Lemoinovu kružnici. Pokud budeme pokračovat dál (pošleme koeficient do záporných čísel) a rovnoběžky budeme kreslit „až za“ bod K, projdou v jednom okamžiku bodem K všechny antirovnoběžky, kteréžto situaci odpovídá tvrzení o kosinové kružnici. Že se tak pro všechny tři antirovnoběžky stane v jednom okamžiku, plyne z toho, že poměr $\frac{|KR|}{|KA|}$ lze vyjádřit jen pomocí koeficientu původní stejnolehlosti, takže bod R a jeho dva analogy splynou s bodem K ve stejném okamžiku.

Cvičení. Ukažte, že kosinová kružnice je rozpůlena Lemoinovou kružnicí.

Návod. Stačí, že K leží na jejich chordále.

Nechť X je bod uvnitř trojúhelníka ABC. Jeho *úpatnicovým*[14] *trojúhelníkem* myslíme trojúhelník s vrcholy v patách kolmic z X na strany AB, BC a CA. S použitím tohoto pojmu můžeme například Tvrzení 54 z minulého dílu (Six feet theorem) zformulovat tak, že úpatnicové trojúhelníky kamarádů sdílejí kružnici opsanou.

Vzhledem k tomu, kolik věcí o Lemoinově bodu platí, bylo by zvláštní, aby žádné známé tvrzení neneslo jméno stejného velikána.

Tvrzení. (Lemoine theorem) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka.*

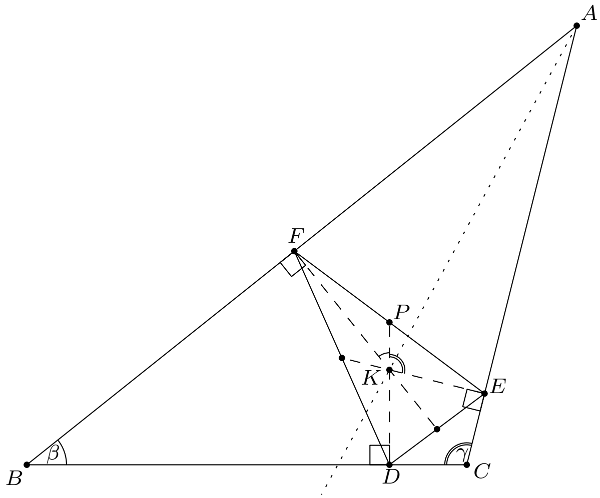
There is no royal road to geometry. – Eukleides

Důkaz. Jak naznačuje citát, budeme muset trochu počítat. Označme paty kolmic z K na strany BC, AC a AB po řadě D, E a F a dále průsečík přímky DK s úsečkou EF jako P. Pro první implikaci stačí dokázat, že bod P je středem úsečky EF. Tím bude přímka PK těžnicí v trojúhelníku DEF na stranu EF a analogicky to bude platit pro ostatní strany, čili K bude vskutku těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka DEF. Ze sinové věty pro trojúhelník KFP plyne: $|FP| = |FK|\frac{\sin|\sphericalangle FKP|}{\sin|\sphericalangle FPK|}$. Analogicky z trojúhelníku KPE odvodíme $|EP| = |KE|\frac{\sin|\sphericalangle PKE|}{\sin|\sphericalangle KPE|}$. Díky pravým úhlům u bodů E a F (paty kolmic) víme, že $|\sphericalangle FKP| = \beta$ a $|\sphericalangle EKP| = \gamma$. Jelikož K leží na a-symediáně a vzdálenost od přímky se měří na komici, platí $\frac{|KF|}{|KE|} = \frac{c}{b}$. Dohromady dostáváme

$$\frac{|FP|}{|PE|} = \frac{|FK|}{|EK|}\frac{\frac{\sin\beta}{\sin|\sphericalangle FPK|}}{\frac{\sin\gamma}{\sin|\sphericalangle KPE|}} = \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = 1,$$

což plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC (v předposlední rovnosti jsme využili, že úhly, jejichž součet je $180°$, mají stejnou hodnotu sinu).

[14]Tento název je sice krásně český, ale téměř výhradně se místo něj používá anglický *pedal triangle*.



Pro opačnou implikaci uvažme bod X, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka, a uvažme stejnou konstrukci jako na obrázku (pro jednoduchost použijeme i stejné označení, pouze místo K máme X). Postupem podobným tomu z předchozí části můžeme vyjádřit poměr délek XE a XF jako

$$\frac{|XF|}{|XE|} = \frac{|FP|}{|PE|}\frac{\frac{\sin|\sphericalangle FPX|}{\sin\beta}}{\frac{\sin|\sphericalangle XPE|}{\sin\gamma}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b},$$

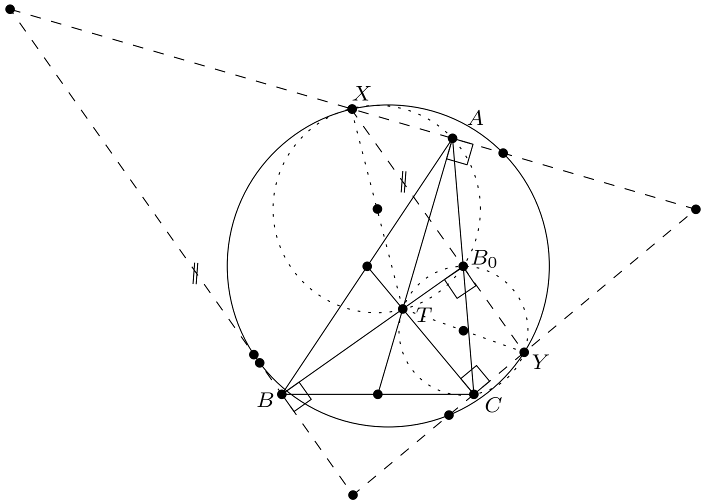
z čehož vyvodíme, že X leží na a-symediáně. Analogicky leží i na zbylých dvou symediánách, tedy platí $X = K$.

Ukážeme si, jak lze teorii získanou v této části aplikovat na úlohu, jejíž formulace obsahuje jen ty nejzákladnější středy, a přesto je k jejímu řešení potřeba[15] teorie z této části seriálu.

Příklad. Tři těžnice dělí trojúhelník ABC na šest trojúhelníků. Ukažte, že jejich opsiště leží na jedné kružnici.

Řešení. Vrcholy A, B a C veďme kolmice na příslušné těžnice. Tak vznikne trojúhelník, v němž je ABC úpatnicový trojúhelník bodu T, který je v něm těžištěm. Z minulého tvrzení plyne, že T je Lemoinův bod v novém trojúhelníku.

[15] Pravděpodobně; autorům není znám jednodušší důkaz.



Když se ale podíváme na obrázek, jsou opsiště malých trojúhelníčků nějak divně uvnitř a kružnice, kterou by měly určovat, nevypadá povědomě. Není ale třeba si zoufat. Uvažujme stejnolehlost se středem v T (jako vždy stejnolehlíme z Lemoinova bodu) a koeficientem 2. Kam se při ní zobrazí našich šest opsišť? Každé z nich leží na osách stran malých trojúhelníčků, jejich obrazy tedy budou ležet na přímkách dvakrát vzdálenějších od T. Speciálně každý z obrazů opsišť leží na osách spojnic vrcholů s těžištěm, které od těžiště dvakrát vzdálíme. To znamená, že leží na stranách nového trojúhelníku, protože ten má strany kolmé na těžnice v ABC.

Nyní stačí dokázat, že těchto šest bodů na obvodu trojúhelníka, v němž něco víme o Lemoinově bodu, leží na kružnici. Zní to povědomě? Asi tušíte, že naše kružnice je jedna z Tuckerových. Označme B_0 střed strany AC a zobrazená opsiště trojúhelníků ATB_0 a CTB_0 po řadě X a Y (viz obrázek). Obě původní opsiště leží na ose úsečky TB_0, takže X a Y leží na kolmici na b-těžnici vedené bodem B_0. To je jedna ze stran velkého trojúhelníka (kolmice na b-těžnici vedená bodem B) zobrazená ve stejnolehlosti se středem v T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Analogicky to platí i pro zbylé dvě dvojice sousedních trojúhelníčků. Tedy naše šestice bodů leží na Tuckerově kružnici ve velkém trojúhelníku odpovídající koeficientu $-\frac{1}{2}$.

Cvičení. (Kružnice šesti bodů) Z paty výšky z vrcholu A trojúhelníku ABC spustíme kolmice na strany AB a AC a uvážíme jejich paty. Podobně sestrojíme další čtyři paty. Dokažte, že všech šest takto získaných bodů leží na kružnici.

Návod. Je to jedna z Tuckerových kružnic. Spojte body lomenou čarou střídavě rovnoběžnou a antirovnoběžnou s protější stranou.

Cvičení. Mějme různostranný trojúhelník ABC, jeho těžiště označme T a kolmiště H. Jeho vrcholy veďme kolmice na příslušné těžnice (jako v minulém příkladu). Dokažte, že těžiště vzniklého trojúhelníka leží na přímce TH.

Návod. Použijte Lemoine theorem stejně jako v posledním příkladě. Vzpomeňte si na Eulerovu přímku a Six feet theorem.

Další kamarádi

Těsně před koncem minulého dílu jsme tvrdili, že z kamarádů nejdůležitějších středů trojúhelníka nám chybí jen kamarád těžiště, neboli Lemoinův bod. Vzhledem k času, který jsme s ním strávili, jej tímto prohlašujeme za dostatečně prozkoumaný. Z těch pokročilejších středů jsme ještě nemluvili o kamarádovi středu Feuerbachovy kružnice F. Následující tvrzení to alespoň informativně napravuje, nebudeme ho totiž dokazovat.

Tvrzení. *Kamarád bodu F (středu Feuerbachovy kružnice) je průsečík přímek AO_A, BO_B a CO_C, kde O_A je opsiště trojúhelníku OBC atd.*

A kde ještě můžeme potkat kamarády? Jste-li alespoň trochu obeznámeni s elipsami, můžete si dokázat následující tvrzení.

Tvrzení. *Ohniska elipsy vepsané do trojúhelníku spolu kamarádí.*

A nakonec jedno malé okénko do třetího rozměru.

Cvičení. Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že E a F jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. (MKS–33–3j–7)

Návod. Dokažte izogonalitu v jednom vrcholu. Vepsaná koule a připsaná koule jsou stejnolehlé podle D. Pomocí toho a stejných tečen najděte shodné trojúhelníky a dopočítejte. Podívejte se na řešení. :-)

Kdybyste stále nebyli zcela přesvědčeni, že jsou kamarádi v geometrii trojúhelníka opravdu na každém rohu, další kapitolka by to mohla napravit.

Gergonnův a Nagelův bod

Abychom neměli v seriálu málo exoticky znějících jmen, přidáme si dvě další.

Mějme trojúhelník ABC. Dotyky jeho kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB označíme po řadě D, E, F a dotyky kružnic připsaných ke stejným stranám po řadě P, Q a R. Z Cevovy věty (viz začátek sekce o kamarádech z prvního dílu) plyne, že se úsečky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Opravdu, jelikož se jedná o kružnici vepsanou, platí díky stejně dlouhým úsekům tečen $|AF| = |AE|$, $|BF| = |BD|$ a $|CD| = |CE|$, takže poměr z Cevovy věty vyjde 1. Tento průsečík nazýváme *Gergonnovým*[16] *bodem* a značíme jej G. Jelikož jsou na každé straně body dotyku vepsané a opsané kružnice symetrické podle středu oné strany (viz Tvrzení 48 z prvního dílu), plyne z Cevovy věty, že se úsečky AP, BQ a CR protínají v jednom bodě. Ten nazýváme *Nagelův*[17] *bod* a značíme jej N.

Cvičení. Při značení zavedeném výše platí, že Gergonnův bod v trojúhelníku ABC je Lemoinovým bodem trojúhelníka DEF.

Návod. Vzpomeňte si na Tvrzení o průsečíku tečen z minulého dílu.

Cvičení. (těžší) Nagelův bod trojúhelníku ze středních příček je vepsištěm původního trojúhelníku. Dokažte.

Návod. Nejprve dokažte pomocné tvrzení: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a body X, Y leží postupně na jeho stranách BC a CD tak, že $|BX| = |DY|$. Označme Z průsečík úseček BY a DX. Dokažte,

---

[16] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) byl francouzský matematik a logik.

[17] Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) byl německý matematik a geometr.

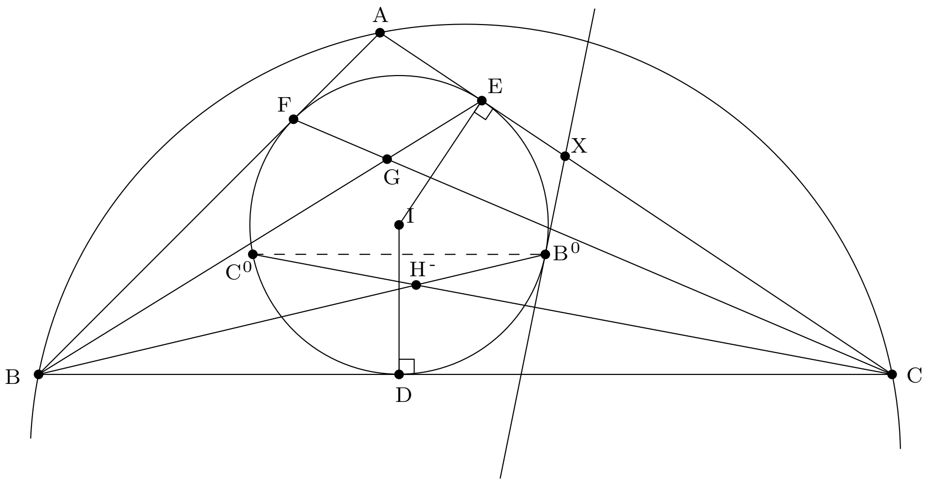
že přímka AZ je osou úhlu BAD. Toto tvrzení aplikujte na každý z rovnoběžníků vzniklých v daném trojúhelníku po dokreslení středních příček.

Důsledek. *Jelikož je Nagelův bod trojúhelníka ze středních příček (čili vepsiště původního trojúhelníka) obrazem Nagelova bodu původního trojúhelníka ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $-\frac{1}{2}$, leží body I, T a N na jedné přímce v poměru $|IT| : |TN| = 1 : 2$. Tato přímka se nazývá Nagelova přímka.*

Před následujícími dvěma tvrzeními je dobré si připomenout, že dvě kružnice (až na degenerované případy) mají dva středy stejnolehlosti, z nichž jedna má kladný koeficient a druhá záporný.

Tvrzení. *Kamarádem Gergonnova bodu G je střed záporné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

Důkaz. Na úvod poznamenejme, že tento důkaz funguje pouze pro situace podobné té na našem obrázku, ostatní případy nebudeme rozebírat. Označme D, E a F doteky vepsané kružnice po řadě se stranami BC, AC a AB. Gergonnův bod označme G, obraz bodu E v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ABC označme B' a obraz bodu F v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ACB označme C'. Jelikož je vepsaná kružnice osově souměrná podle osy úhlu, leží body B' a C' na ní. Přímky BB' a CC' jsou izogonály přímek BG a BE, takže jejich průsečík je kamarád bodu G. Označme jej sugestivně H^-. Pokud dokážeme, že je přímka $B'C'$ rovnoběžná s BC, budeme mít vyhráno, protože pak bude platit $\frac{|H^-B|}{|H^-B'|} = \frac{|H^-C|}{|H^-C'|}$. Z toho a z analogických tvrzení pro analogicky definovaný bod A' dostaneme, že stejnolehlost se středem v H^- mající takový (rozmyslete si, že musí být záporný) koeficient, aby se bod B zobrazil na B', zobrazuje i C na C' a A na A'. Zobrazuje na sebe tedy i kružnice opsané těmto trojicím, což jsou přesně kružnice opsaná a vepsaná.



Vraťme se k důkazu zmíněné rovnoběžnosti. Vyjádříme velikost úhlu DIB'. Platí $|\sphericalangle DIB'| = |\sphericalangle DIE| - |\sphericalangle EIB'|$. Z deltoidu $IDCE$ vidíme, že $|\sphericalangle DIE| = 180° - \gamma$. Dále nechť tečna ke kružnici vepsané vedená bodem B' protne stranu AC v bodě X. Vzhledem ke konstrukci bodu B' musí být tato tečna osově souměrná s přímkou AC podle osy úhlu ABC. Z toho dopočítáme $|\sphericalangle EIB'| = |\sphericalangle B'XC| = 180° - (360° - 2\alpha - \beta)$. Získané vztahy dosadíme do prvního výpočtu a dostáváme

$$|\sphericalangle DIB'| = 180° - \gamma - 180° + 360° - 2\alpha - \beta = 180° - \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že tato hodnota nezávisí na β a γ, musí být ze symetrie stejná jako velikost úhlu DIC'. Jelikož je úsečka ID kolmá na BC, plyne z dokázaného, že je úsečka $B'C'$ opravdu rovnoběžná s BC, a jsme hotovi.

Z podobných úvah vyplývá následující tvrzení.

Tvrzení. *Kamarádem Nagelova bodu N je střed kladné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

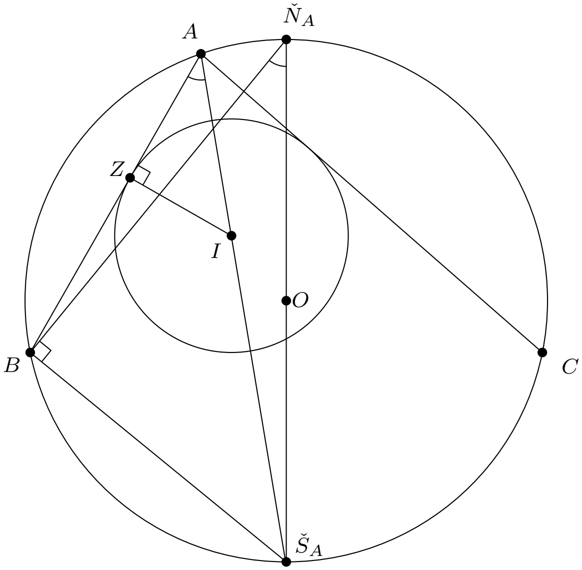
Ponceletovo porisma

Kružnice je zakulacená přímka s dírou uprostřed. – neznámý autor

V tomto oddíle bude třeba zavzpomínat na předcházející díl. Konkrétně budeme pracovat se Švrčkovými body, antišvrky a některými jejich vlastnostmi.

Věta. *(Eulerova formule, Ponceletovo porisma) Nechť kružnice ω se středem I a poloměrem r leží uvnitř kružnice Γ se středem O a poloměrem R. Nechť A, B a C jsou body na Γ takové, že AB i AC se dotýkají ω. Potom se BC dotýká ω právě tehdy, když $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$.*

Důkaz. Zjevně platí, že BC se dotýká ω právě tehdy, když je ω kružnice vepsaná trojúhelníku ABC.



Označme jako $\check{S}_A$ a $\check{N}_A$ Švrčkův bod a antišvrk příslušné A v trojúhelníku ABC. Dále buď Z bod dotyku AB s ω. Zjevně AI je osou úhlu BAC, takže $\check{S}_A$ leží na AI. Proto $|\sphericalangle IAZ| = |\sphericalangle \check{S}_A AB| = |\sphericalangle \check{S}_A \check{N}_A B|$. Navíc zjevně $|\sphericalangle AZI| = 90° = |\sphericalangle \check{N}_A B \check{S}_A|$. Trojúhelníky AZI a $\check{N}_A B \check{S}_A$ jsou tudíž podobné.

Proto

$$|AI| \cdot |B\check{S}_A| = |\check{S}_A \check{N}_A| \cdot |IZ| = 2Rr.$$

Zároveň z mocnosti I ku Γ plyne

$$|AI| \cdot |I\check{S}_A| = R^2 - |OI|^2.$$

Z toho vyvodíme, že $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ právě tehdy, když $|IŠ_A| = |BŠ_A|$. Ale protože I leží na $AŠ_A$, je I vepsiště trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|IŠ_A| = |BŠ_A|$. Tím máme hotovo.

Implikaci „pokud ω je kružnice vepsaná, potom $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$“ se obvykle říká Eulerova formule,[18] zatímco implikace „pokud $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, potom ω je kružnice vepsaná“ se občas označuje jako Ponceletovo porisma. Toto označení je ovšem poněkud zavádějící, protože Ponceletovo porisma je daleko obecnější tvrzení, které nemluví jen o trojúhelnících, ale i o mnohoúhelnících a dokonce i o ještě obecnějších útvarech.

Protože se jedná o velmi zajímavou geometrii, v následujících několika odstavcích si Ponceletovo porisma přiblížíme v jeho plné kráse. Musíme se ovšem připravit na pár věcí, které nás tam čekají.

Zaprvé překročíme pravomoce dané jménem seriálu, tj. nepůjde nám pouze o geometrii trojúhelníka, nýbrž i o daleko různorodější figury. Vězte, že se za toto pro nic za nic porušení pranic tradic a hranic omlouváme, a pokud to váš hněv nesmíří, budeme se i náležitým způsobem káti.[19]

Zadruhé bude velká část následujícího výkladu podána způsobem, který bychom lidově nazvali „mlha“ nebo „mávání rukama“, tj. leccos bude podáno neformálně a s nevelkou dbalostí na detaily. Je tomu tak proto, že pro přesné definice, formálně správné popisy a řádný důkaz bychom potřebovali strašidelná slova jako „limita“ a „integrál“, která zde nechceme (a kvůli nedostatku místa ani nemůžeme) zavádět.[20] Navíc bychom se tím příliš ponořili do algebry a místo kreslení neobvyklých obrázků bychom jenom přidávali a přeskupovali symboly, dokud by to nevyšlo. A to přece nikdo nechce.

Zatřetí může být nadcházející část z výše uvedených důvodů poněkud obtížná. Nebojte se ji při prvním (a třeba i jakémkoliv dalším) čtení přeskočit. Slibujeme, že žádná seriálová úloha nebude stavět na ní. Uvádíme ji pouze proto, že nám přijde dobrá.

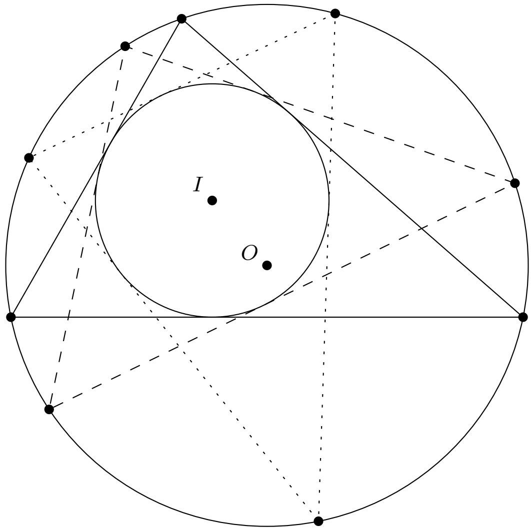
Nyní se už konečně pusťme do práce.

Na výše uvedené verzi Ponceletova porismatu nás nebude příliš zajímat vztah $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, ten je spíše náhodný. Uchopitelnější myšlenka, která odtud plyne, je následující: Představte si, že vám někdo dal obrázek, na kterém jsou nakresleny dvě kružnice. Dostanete za úkol nakreslit trojúhelník, pro který je jedna ze zadaných kružnic kružnicí opsanou a druhá kružnicí vepsanou. Pokud byste měli k dispozici i jeden z vrcholů tohoto trojúhelníka, pak je to jednoduché – z prvního vrcholu udělat tečnu k vepsané, tu protnout s opsanou, tím získat druhý vrchol a dál pokračovat stejně. Jenže co když ten první vrchol nemáte? Inu, Ponceletovo porisma říká, že to nevadí – pokud tento postup funguje v nějakém bodě kružnice opsané, pak funguje v *každém* jejím bodě. Platí totiž, že libovolném bodě uspějeme právě tehdy, když $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$, což je nezávislé na volbě bodu.

[18] Způsob, jakým jsme ji zavedli, je ovšem poněkud nestandardní a možná z něj úplně dobře není vidět, co tato formule vlastně říká. Klasické znění je následující: Pokud ABC je trojúhelník s vepsištěm I, opsištěm O, a poloměry kružnice vepsané a opsané postupně r a R, pak $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$.

[19] Své kreativní návrhy odpovídajících trestů, způsobů pokání a mučicích technik můžete zasílat na e-mail *mks@mff.cuni.cz*.

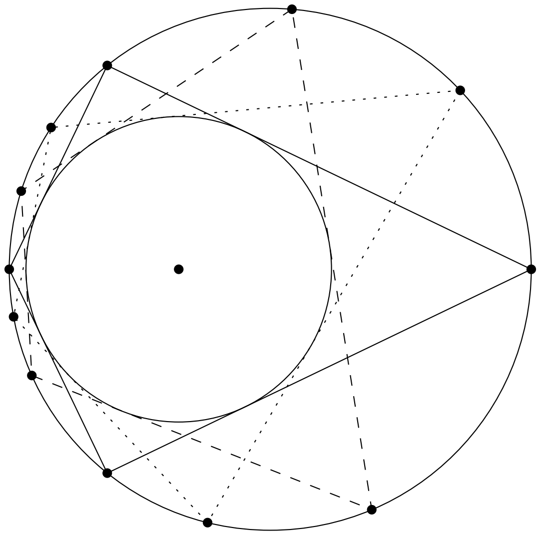
[20] Místo nich budeme používat slova jako „malý“, „skoro“ a „přibližně“.



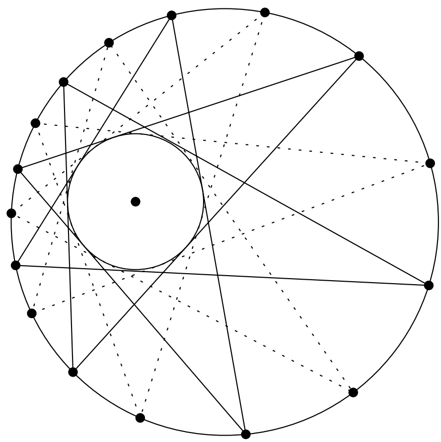
$k = 3$, $n = 1$

Nyní si Ponceletovo porisma zobecníme. Představte si, že jste dostali stejnou úlohu jako předtím (máte tedy na papíře nakreslenou kružnici Γ, která má být opsaná, a v ní menší kružnici ω, která má být vepsaná[21]), jen nemáte za úkol sestrojit trojúhelník, nýbrž obecnější útvar – uzavřenou lomenou čáru. No, co dělat, začnete v náhodném bodě a potom, co nakreslíte k úseček a celou kružnici Γ obkroužíte n-krát, se skutečně náhodou vrátíte do výchozího bodu. Inu, obecné Ponceletovo porisma tvrdí, že pokud vám to jednou takhle vyšlo, pak ať začnete kdekoliv, vždy se po k úsečkách a n obejitích celé kružnice vrátíte na výchozí pozici. (Všimněte si, že výše uvedené tvrzení je speciální případ pro $k = 3$ a $n = 1$.)

[21]Ve skutečnosti se nemusí ani jednat o kružnice; aby tvrzení fungovalo, stačí uvažovat kuželosečky. Ale to už je skutečně nad rámec našeho seriálu.



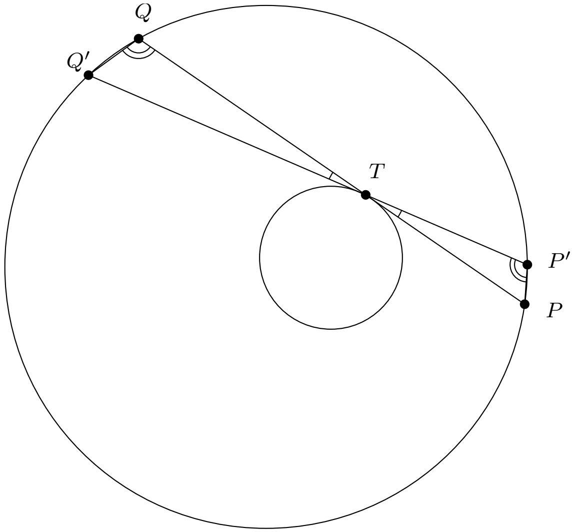
$k = 4$, $n = 1$



$k = 8$, $n = 3$

Důkaz je vskutku podivuhodný. Představte si, že po obvodu Γ postavíte zeď. A ne jen tak ledajakou, nýbrž takovou, která má v každém bodě X kružnice Γ výšku rovnou $\frac{1}{d(X)}$, kde $d(X)$ značí délku tečny z X k ω. K čemu vám taková zeď bude?

Uvažujte tětivu PQ kružnice Γ. Tětiva PQ rozděluje zeď na dvě části. Nechť $S(PQ)$ je povrch té části zdi, která přísluší oblouku Γ směřujícímu od P do Q po směru hodinových ručiček. Důležité pozorování je, že pokud se PQ dotýká ω, pak hodnota $S(PQ)$ je nezávislá na konkrétní poloze PQ. To rozhodně není vidět, a právě tuto část nebudeme dělat příliš rigorózně. Přesto se pokusíme ji trochu přiblížit.



Vezměme si dvě tětivy, PQ a $P'Q'$, které se dotýkají ω, a to konkrétně takové, aby body P a P' byly u sebe blízko (BÚNO tak, že P' je kousek po směru hodinových ručiček od P). Protože $S(PQ)$ i $S(P'Q')$ obě obsahují $S(P'Q)$, stačí ukázat, že $S(PP') = S(QQ')$. Buď T průsečík PQ a $P'Q'$. Všimněme si, že délka oblouku PP' je skoro rovna $|PP'|$ a analogicky délka oblouku QQ' je téměř rovna $|QQ'|$. Navíc T je velmi blízko bodům dotyku PQ a $P'Q'$ s ω, takže[22] $d(P) \approx |PT| \approx d(P')$ a analogicky $d(Q) \approx |Q'T| \approx d(Q')$. Proto $S(PP')$ a $S(QQ')$ umíme přibližně vyjádřit jako $\frac{|PP'|}{|PT|}$ a $\frac{|QQ'|}{|Q'T|}$. Jenže tyto dvě hodnoty jsou stejné, protože trojúhelníky $PP'T$ a $Q'QT$ jsou podobné.

Mohlo by se zdát, že jsme nic objevného nezjistili. Nějaké aproximace[23] $S(PP')$ a $S(QQ')$ jsou sice stejné, ale protože $S(PP')$ i $S(QQ')$ jsou (z toho, jak jsme volili PQ a $P'Q'$) takřka nula, tak dává jen smysl, že nějaké dva odhady jsou stejné.

Trik je v tom, že si rozkrájíme oblouk PP' na spoustu malinkatých obloučků a jejich koncové body spojíme. Tím dostaneme lomenou čáru jdoucí z P do P', která je složená ze spousty malinkatých úseček. Protože naše aproximace oblouku funguje tím lépe, čím menší oblouk zkoumáme, je na každém obloučku naše přiblížení *fakt dobré*. Důležité je, že není dobré pouze ve smyslu „rozdíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko nule“, nýbrž i ve smyslu „podíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko jedné“. To totiž znamená, že pokud všechny přibližné hodnoty přes všechny obloučky sečteme, dostaneme hodnotu, která bude $S(PP')$ stále aproximovat *fakt dobře*.

K tomuto přiblížení ovšem existuje odpovídající přiblížení oblouku QQ', které dle předchozího dává stejnou hodnotu. Navíc na QQ' budou příslušné obloučky taktéž malinké, takže i tam bude naše aproximace fakt dobrá. To znamená, že $S(PP')$ i $S(QQ')$ umíme libovolně dobře aproximovat stejnou hodnotou. To ale už potom musí znamenat, že $S(PP') = S(QQ')$.

No dobře, to je sice hezké, ale co z toho? Inu, důležité je, že pro každou tětivu PQ dotýkající se ω je $S(PQ)$ rovno nějakému pevnému c. Pokud označíme povrch celé zdi jako z a budeme předpokládat, že se po k přesunech po tečně dostaneme do výchozího bodu a obejdeme přitom kružnici n-krát, pak musí platit $ck = nz$. Potom ale ať začneme kdekoliv, pak během k kroků projdeme kolem zdi o celkovém povrchu $ck = nz$. Ale to přesně znamená, že ujdeme n koleček, což je to, co jsme chtěli ukázat.

[22] Znakem $\approx$ myslíme „je přibližně rovno“.

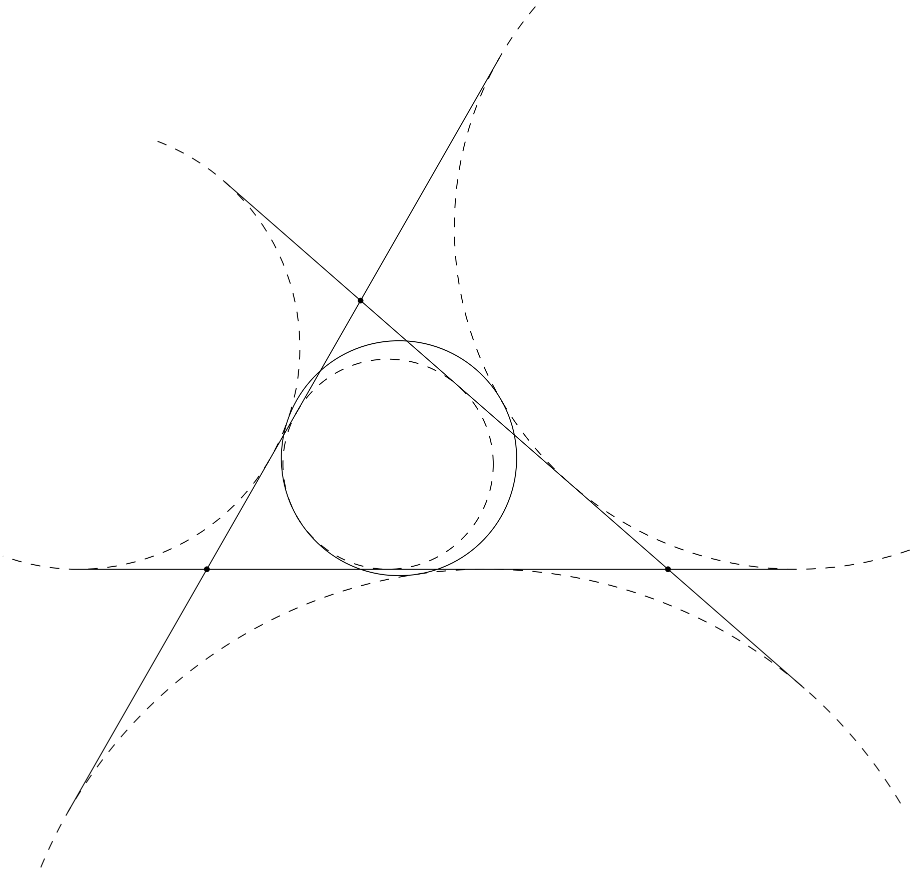
[23] Aproximace znamená „přibližné vyjádření“.

Fonteného věty

Dyť ty přiblblý citáty stejně nikoho nezajímaj'. – Rado, psa[24] seriál ve čtyři ráno

Někteří z vás už zajisté slyšeli o následující větě:

Věta. *(Feuerbachova) Kružnice vepsaná i všechny kružnice připsané se dotýkají Feuerbachovy kružnice.*



[24]Od tohoto slovesného patvaru se korektorská sekce distancuje.

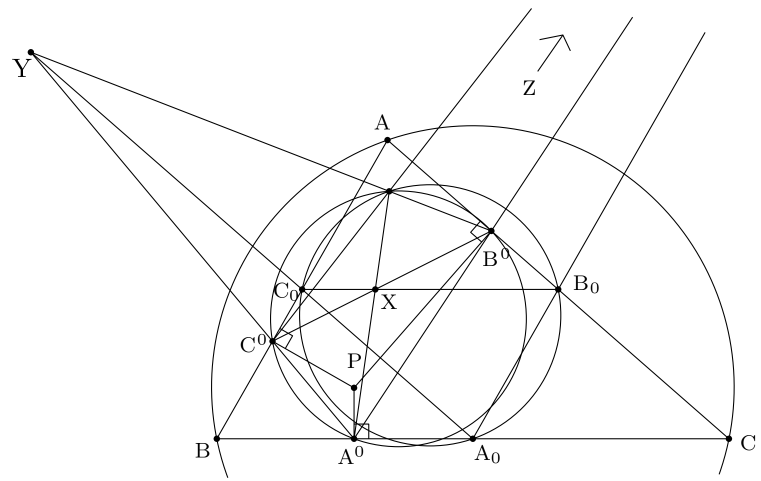
Důkazů této věty je několik a všechny jsou vcelku obtížné. Když už si s ní budeme tedy dávat tu práci, proč rovnou nedokázat něco obecnějšího? Povšimněme si, že kružnice vepsaná a připsané jsou kružnice opsané trojúhelníků postavených z projekcí vepsiště, respektive připsišť na strany trojúhelníka. Budeme se tedy zajímat o to, kdy pro bod P, jehož projekce na přímky BC, CA a AB jsou postupně A', B' a C', platí, že se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice.

Všimněme si, že o zmíněné kružnici opsané už něco víme. Six feet theorem nám totiž říká, že splývá s analogickou kružnicí pro je kamaráda bodu P. Tedy bod P „vyhovuje“ právě tehdy, když „vyhovuje“ jeho kamarád. Nakonec si všimněme, že O a H se možná dají považovat za vyhovující, protože by se tak trochu dalo říci, že kružnice se dotýká sama sebe. Tato drobná pozorování nás vedou k následující (správné) domněnce:

Věta. *(Zobecněná Feuerbachova) Buď ABC trojúhelník s opsištěm O a dále P libovolný bod s kamarádem P'. Buďte A', B' a C' paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB. Potom se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice trojúhelníku ABC právě tehdy, když P, O a P' leží na jedné přímce.*

Této větě se také říká třetí Fonteného věta. K jejímu důkazu budeme potřebovat druhou Fonteného větu a k důkazu té je zase zapotřebí věta první. Vezměme je tedy pěkně popořadě.

Věta. *(První Fonteného) Nechť je dán trojúhelník ABC. Nechť A_0, B_0 a C_0 jsou po řadě středy stran BC, CA a AB. Buď P libovolný bod a označme A', B' a C' postupně paty kolmic z P na přímky BC, CA, AB. Dále označme X průsečík přímky B_0C_0 s $B'C'$, Y průsečík přímky A_0C_0 s $A'C'$ a Z průsečík přímky A_0B_0 s $A'B'$. Pak platí, že přímky $A'X$, $B'Y$ a $C'Z$ se protínají v jednom z průsečíků kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$.*

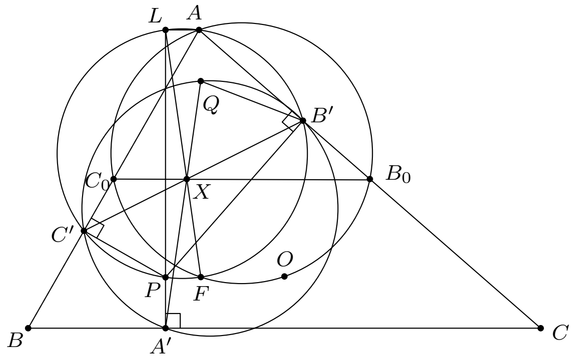


Důkaz. Nazvěme průsečík přímky $A'X$ s Feuerbachovou kružnicí (tj. kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$) jako Q. Ukážeme, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.

Zadefinujeme si několik pomocných bodů. Označme jako F druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům $AB'C'$ a AB_0C_0 a jako L průsečík přímky $A'P$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $AB'C'$. Ukážeme, že LF prochází bodem X a $A'Q$ je obraz LF při překlopení přes B_0C_0. Potom bude z mocnosti X ke kružnici opsané trojúhelníku $AB'C'$ platit

$$|XQ| \cdot |XA'| = |XF| \cdot |XL| = |XB_0| \cdot |XC_0|,$$

z čehož již plyne, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.



Povšimněme si, že kružnice opsaná trojúhelníku $AB'C'$ je kružnicí nad průměrem AP. Tedy $PL \perp AL$. Ale zároveň $PL \perp BC$. Proto $AL \parallel BC$.

Díky tomu platí,[25] že přímka LF svírá s přímkou B_0C_0 stejný úhel jako s přímkou AL. Tento úhel ale umíme upravit na $|\sphericalangle ALF| = |\sphericalangle AC'F|$. Abychom ukázali, že L, X a F leží na jedné přímce, chceme ukázat, že přímka FX svírá s B_0C_0 tentýž úhel, tedy že $|\sphericalangle AC'F| = |\sphericalangle B_0XF|$. To je ovšem ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $XC_0C'F$ je tětivový. A tuto skutečnost ukážeme jednoduchým vyúhlením:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle C_0FC'| &= |\sphericalangle AFC'| - |\sphericalangle AFC_0|\\ &= |\sphericalangle AB'C'| - |\sphericalangle AB_0C_0|\\ &= 180^\circ - |\sphericalangle XB'B_0| - |\sphericalangle B'B_0X|\\ &= |\sphericalangle B_0XB'|\\ &= |\sphericalangle C_0XC'|.\end{aligned}$$

Tím jsme tedy ukázali kolineárnost bodů L, X a F. Zbývá ukázat, že se při osové souměrnosti podle osy B_0C_0 zobrazí A' do L a F do Q. První z těchto souměrností plyne z toho, že $AL \parallel B_0C_0 \parallel BC$, B_0C_0 je střední příčka a $LA' \perp B_0C_0$. Druhá vyplývá z toho, že díky kolineárnosti L, X a F je obrazem F průsečík obrazu přímky LX s obrazem kružnice opsané AB_0C_0. Přitom obrazem L je A', obrazem X je X a obrazem kružnice opsané $\triangle AB_0C_0$ je kružnice opsaná $A_0B_0C_0$. Ale to je přesně definice Q. Tím máme hotovo.

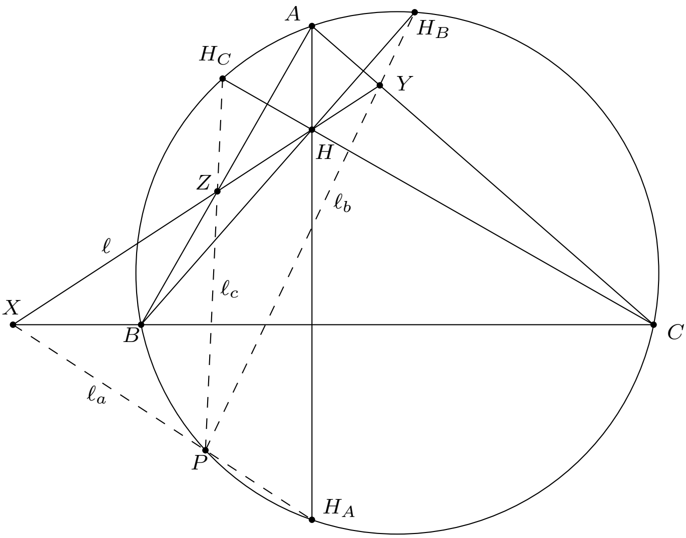
Důkaz celý ovšem zatím hotov není. Ukázali jsme, že AX prochází průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$. Analogicky totéž platí pro BY a CZ. Zatím ale nevíme, že se ve všech třech případech jedná o ten samý průsečík. Z důvodu přehlednosti nebudeme tuto skutečnost dokazovat hned, nýbrž si její zdůvodnění schováme do důkazu druhé Fonteného věty.

Proč část důkazu odkládáme místo toho, abychom se s ní vypořádali okamžitě? To proto, že k ní budeme potřebovat pomocné lemma, se kterým se pak tato část dokáže najednou s druhou Fonteného větou.

Lemma. *Buď ℓ přímka procházející skrz kolmiště H trojúhelníku ABC. Označme si jako ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c obrazy přímky ℓ přes přímky BC, CA a AB. Pak se ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c protínají v jednom bodě P na kružnici opsané $\triangle ABC$. Tento bod se nazývá Anti-Steinerův bod přímky ℓ vzhledem k trojúhelníku*

[25] V případě, že konfigurace vypadá jako na obrázku – jiné případy se řeší analogicky, respektive úplně stejně, pokud umíte používat orientované úhly.

ABC. Toto přiřazení je navíc prosté, tj. žádné dvě různé přímky procházející skrze H nemají stejný Anti-Steinerův bod.



Důkaz. Opět uvažujme konfiguraci jako na obrázku, ostatní se řeší podobně. Označíme si jako X, Y a Z průsečíky ℓ s přímkami BC, CA a AB. Dále budeme obrazy H přes přímky BC, CA a AB nazývat H_A, H_B a H_C. Z prvního dílu víme, že H_A, H_B a H_C leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Zjevně ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c splývají s H_AX, H_BY a H_CZ. Nechť H_AX, H_BY a H_CZ protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech P_A, P_B a P_C. Ukážeme, že $P_B = P_C$, zbytek by se provedl analogicky.

Budeme prostě a jednoduše trochu úhlit:

$$\begin{aligned}
180^\circ - |\sphericalangle BAC| &= |\sphericalangle AYZ| + |\sphericalangle AZY| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle CYH_B| + 180^\circ - |\sphericalangle BZH_C| \\
&= |\sphericalangle ACH_B| + |\sphericalangle P_BH_BC| + |\sphericalangle ABH_C| + |\sphericalangle BH_CP_C| \\
&= |\sphericalangle ACH| + |\sphericalangle P_BAC| + |\sphericalangle ABH| + |\sphericalangle BAP_C| \\
&= (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle P_BAC| + (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle BAP_C|,
\end{aligned}$$

neboli $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAP_C| + |\sphericalangle P_BAC|$, což už implikuje, že $P_B = P_C$.

Abychom ukázali jednoznačnost bodu P, stačí si všimnout, že $|\sphericalangle P_CH_CC| = |\sphericalangle H_CHX|$, tedy velikost oblouku PC je jednoznačně dána úhlem, který ℓ svírá s výškou z C.

S tímto lemmatem jednoduše dokážeme druhou Fonteného větu a doděláme důkaz té první:

Věta. *(Druhá Fonteného) Mějme pevně zvolenou přímku ℓ procházející opsištěm O trojúhelníku ABC. Nechť se P pohybuje po ℓ. Pak se poloha průsečíku kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ nemění.*

Důkaz. Všimněme si, že O je kolmiště $\triangle A_0B_0C_0$. Protože ℓ prochází bodem O, nabízí se možnost, že Q v důkazu první věty by mohl být Anti-Steinerovým bodem příslušným ℓ a $A_0B_0C_0$. Pokud toto dokážeme, pak zjevně budeme hotovi jak s první, tak s druhou Fonteného větou.

Povšimněme si, že F z minulého důkazu leží na kružnicích nad průměry AP a AO. Tedy $PF \perp AF \perp FO$, z čehož plyne, že F leží na ℓ. Protože Q je obraz F při překlopení přes přímku B_0C_0, leží Q na překlopení ℓ podle B_0C_0. Jedná se proto o průsečík tohoto překlopení a kružnice opsané $\triangle A_0B_0C_0$, tedy je to příslušný Anti-Steinerův bod.

Nyní už přicházíme do velkého grandfinále.

Věta. *(Třetí Fonteného) Buď P' kamarád bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC. Pak se kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ dotýkají, právě když body O, P a P' leží na jedné přímce.*

Důkaz. Všimněme si, že pokud jsou přímky PO a $P'O$ různé, pak i jim odpovídající Anti-Steinerovy body Q a Q' jsou různé. To nám přímo dokazuje jednu implikaci.

Při důkazu opačné implikace jsme v situaci, kdy P' leží na OP. V tu chvíli si pomůžeme pohyblivým bodem R, jehož kamaráda označíme R'. Ten se bude pohybovat do P tak, aby R, O a R' neležely na přímce. Pokud si ještě dokreslíme jim příslušné kružnice k_R opsané trojúhelníku $A'_RB'_RC'_R$, pak k_R má s kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$ vždy dva průniky – Anti-Steinerův bod OR a Anti-Steinerův bod OR'. Ale OR i OR' se přesunou na stejnou přímku OP. To znamená, že i jim příslušné průsečíky se posunou do jednoho bodu, a tudíž se z nich stane jeden. Protože se vše pohybuje spojitě, nemůže nám najednou vzniknout úplně nový průsečík. To znamená, že $A'B'C'$ a $A_0B_0C_0$ budou mít jen jeden průsečík a máme tedy hotovo.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Obrazy bodů A', B', C' podle A_0, B_0, C_0 si označíme A'', B'', C''. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$, $A'B'C'$ a $A''B''C''$ se protínají v jednom bodě.

Návod. Uvažte obraz bodu P přes opsiště $\triangle ABC$.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Nechť Q je Anti-Steinerův bod přímky OP vzhledem k trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Označme jako P' kamaráda bodu P a $A''B''C''$ trojúhelník z pat kolmic P' na strany trojúhelníku ABC. Ukažte, že Simsonovy přímky bodu Q vzhledem k trojúhelníkům $A'B'C'$ a $A''B''C''$ jsou rovnoběžné.

Návod. Trochu úhlete a s použitím druhé Fonteného věty ukažte, že jsou obě rovnoběžné s OP.

Závěr

Geometers don't die, they become angles. – neznámý autor.

Gratulujeme! Právě jste se prokousali třetím, pravděpodobně nejsložitějším dílem našeho seriálu. Tím ovšem nekončíme. Geometrie trojúhelníka je velmi rozsáhlý obor a témata v prvních třech dílech musela být pečlivě vybrána s přihlédnutím k mnoha kritériím. Kvůli tomu jsme ovšem museli vypustit mnoho dalších pěkných tématek. Proto na vás v příštích komentářích bude čekat exkluzivní čtvrtý díl. V tom budeme prezentovat několik dalších větiček, tvrzeníček a lemátek. Tentokráte s nimi ovšem nebude z časových důvodů spojená soutěžní série, text bude určený pouze pro nadšené zájemce. Přesto budeme rádi, pokud si i příští část přečtete. Slibujeme, že se vynasnažíme, aby to stálo za to.

K tomuto dílu se asi opět hodí zmínit, že v případě jakýchkoliv otázek byste se neměli zdráhat na nás obrátit. Rádi vám pomůžeme s jakýmikoliv nejasnostmi. Zároveň opět podotýkáme, že v seriálových sériích nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, nýbrž dle tématiky.

Přejeme hodně zdaru!

autoři

Výsledky podzimní části

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1p	2p	3p	4p	1s	celkem	hist.
1.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	25	25	25	25	15	**115,00**	589
2.	*Filip*	*Bialas*	4	GOpatovPH	25	25	21	25	15	**110,72**	780
3.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	22	24	25	20	15	**106,66**	971
4.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	25	24	19	25	14	**106,53**	468
5.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	23	24	23	24	12	**105,88**	106
6.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	22	22	23	22	13	**102,89**	103
7.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	23	23	21	22	13	**102,68**	103
8.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	22	23	24	22	12	**101,90**	102
9.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	21	22	21	21	15	**99,06**	99
10.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	16	24	21	22	15	**97,50**	260
11.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	20	20	19	17	15	**90,83**	442
12.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	23	20	19	17	11	**89,90**	269
13.	*Veronika*	*Hladíková*	4	GMikul23PL	16	22	19	18	15	**89,06**	421
14.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	17	21	20	16	15	**88,99**	238
15.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	19	13	20	22	15	**88,75**	468
16.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	17	22	15	19	15	**88,09**	153
17.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	17	21	21	22	7	**87,40**	260
18.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	23	18	17	22	7	**86,96**	292
19.	*Jakub*	*Parada*	1	G Gröss BA	22	22	22	21	–	**86,86**	87
20.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	25	15	15	22	9	**86,28**	477
21.	*Jáchym*	*Solecký*	4	PORG PH	17	12	20	22	15	**85,69**	287
22.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	23	19	22	16	6	**85,29**	402
23.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	17	21	18	19	9	**85,08**	271
24.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	17	21	13	24	9	**84,79**	85
25.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	22	21	16	22	–	**80,98**	81
26.	*Tomáš*	*Domes*	4	MendelG OP	16	19	15	18	8	**76,00**	406
27.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	21	16	19	12	6	**74,60**	75
28.	*Miroslav*	*Macko*	1	ŠpMNDaG BA	22	20	15	17	–	**74,15**	74
29.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	15	19	17	15	7	**73,73**	74
30.	*Martin*	*Melicher*	2	GPošKošice	25	24	23	–	–	**71,74**	72
31.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	22	17	17	3	10	**68,18**	135
32.	*Radka*	*Křížová*	1	GHeyrovPH	21	20	14	13	–	**67,75**	68
33.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	18	17	21	10	2	**67,64**	111
34.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	19	18	12	9	9	**66,37**	223
35.	*Martin*	*Hubata*	1	GMikul23PL	19	17	19	8	–	**63,11**	63
36.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	19	17	8	16	1	**61,00**	61
37.	*Jana*	*Pallová*	2	GJŠkodyPŘ	14	17	11	7	11	**59,15**	217
38.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	15	11	14	15	4	**58,89**	473
39.	*Oldřich*	*Jandl*	2	NPorg	18	16	17	–	7	**58,03**	58
40.	*Vojtěch*	*Lanz*	3	GZborovPH	17	17	18	–	4	**56,74**	489
41.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	9	17	14	9	5	**55,16**	263
42.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	14	9	10	12	10	**54,91**	174
43.	*Veronika*	*Šritterová*	1	PORG PH	19	17	13	7	–	**54,78**	55

44.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	17	11	18	4	6	**54,53**	143
45.	*Ester*	*Friedlaenderová*	4	GKepleraPH	15	21	13	0	5	**54,00**	54
46.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	19	13	14	–	7	**52,80**	185
47.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	16	18	18	–	–	**52,23**	304
48.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	13	13	15	–	9	**51,73**	245
49.	*Martin*	*Pašen*	4	GRaymanaPV	15	14	14	10	–	**51,57**	158
50.	*Cyril*	*Škorvaga*	4	GKepleraPH	14	19	13	0	5	**51,00**	51
51.	*Michal*	*Jelínek*	2	GOhradníPH	11	17	16	0	7	**50,98**	51
52.	*Jaromír*	*Sladkovský*	2	PORG PH	16	16	12	7	–	**50,65**	51
53.	*Ludmila*	*Bujnovská*	3	MendelG OP	20	13	17	–	–	**50,57**	51
54.	*David*	*Klement*	1	GNadAlejPH	14	15	17	5	–	**50,42**	50
55.	*Evžen*	*Wybitul*	3		12	15	11	10	–	**49,38**	170
56.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	11	16	12	3	7	**49,24**	177
57.	*Richard*	*Hladík*	4	GaOA MarLáz	19	18	12	–	–	**48,93**	302
58.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	12	16	11	–	8	**47,23**	592
59.	*Daniel*	*Bárta*	2	GChodoviPH	17	13	17	–	–	**46,80**	47
60.	*Veronika*	*Roubínová*	3	G Kadaň	17	15	14	–	–	**46,64**	178
61.	*Ondřej*	*Svoboda*	4	GJarošeBO	20	17	5	–	4	**46,28**	210
62.	*Julie*	*Přerovská*	1	GNVPláníPH	11	15	8	11	–	**46,13**	46
63.	*Michal*	*Chudoba*	2	GLitoměřPH	14	18	13	–	–	**46,04**	132
64.	*Kamila*	*Kyzlíková*	3	GZborovPH	13	16	12	5	–	**44,93**	289
65.	*Julie*	*Rubášová*	0	BiskG Brno	17	14	13	–	–	**44,66**	45
66.	*Filip*	*Chudoba*	3	PORG PH	10	15	12	8	–	**44,21**	210
67.	*Jan*	*Kaifer*	1	GKepleraPH	22	21	–	–	–	**43,73**	44
68.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	12	12	11	2	7	**43,67**	173
69.	*Matěj*	*Krátký*	1	PORG PH	13	17	14	–	–	**43,28**	43
70.	*Rafael*	*Tadevosjan*	4	GKepleraPH	16	11	11	0	5	**43,00**	43
71.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	14	13	11	5	–	**42,72**	43
72.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	12	9	13	4	5	**42,69**	179
73.	*Jiří*	*Jechumtál*	4	GVoděraPH	15	12	14	–	–	**40,73**	41
74.	*kristian*	*Rigasz*	2	GJHroncaBA	16	14	11	–	–	**40,49**	40
75.	*Petr*	*Khartskhaev*	0	PORG PH	13	14	13	–	–	**40,33**	40
76.	*Václav*	*Volhejn*	4	GKepleraPH	23	16	–	–	–	**39,53**	187
77.	*Anna*	*Musilová*	1	PORG PH	6	11	12	11	–	**39,51**	109
78.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	13	9	10	–	7	**39,19**	95
79.	*Victória*	*Žužičová*	2	GBilíkovBA	20	9	9	–	–	**39,08**	39
80.	*Timur*	*Sibgatullin*	2	PČGKarVary	21	5	12	–	–	**38,26**	137
81.	*Jan*	*Hrůza*	4	G Kadaň	11	13	12	3	–	**38,14**	143
82.	*Kristína*	*Szabová*	3	GVarŽilina	15	8	8	–	6	**37,83**	38
83.	*Petr*	*Ježek*	3	GBNěmcovHK	13	16	7	1	–	**37,13**	184
84.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	16	9	9	0	2	**36,81**	37
85.	*David*	*Šnajdr*	2	GMikul23PL	9	18	9	–	–	**36,73**	37
86.–87.	*Nikol*	*Krejčí*	1	PORG PH	13	11	13	–	–	**36,66**	37
86.–87.	*Tatiana*	*Ondrejková*	1	GNovéZámky	13	11	13	0	–	**36,66**	37
88.	*Matej*	*Moško*	2	G Gröss BA	22	15	–	–	–	**36,57**	37
89.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	9	9	10	–	7	**34,83**	127
90.	*Daniel*	*Herman*	4	GŠroKošice	7	19	8	–	–	**34,74**	100
91.	*David*	*Dvořák*	3	G Konice	13	13	6	1	–	**33,94**	34
92.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	14	10	9	–	–	**33,84**	158
93.	*Jan*	*Nekarda*	1	GUHradiště	18	16	–	–	–	**33,59**	34
94.	*Vojtěch*	*Šára*	2	PORG PH	–	11	11	12	–	**33,33**	33
95.	*Jonáš*	*Stoilov*	1	PORG PH	16	17	–	–	–	**32,72**	33

96.	*Denisa*	*Chytilová*	3	GJŠkodyPŘ	18	15	–	–	–	**32,49**	275
97.	*František*	*Záhorec*	1	G Roudnice	17	15	–	–	–	**31,72**	32
98.	*Anna*	*Kovárnová*	2	G Jírov ČB	19	13	–	–	–	**31,59**	32
99.	*Ondřej*	*Dušek*	3	PORG PH	7	9	14	–	–	**31,00**	141
100.–101.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	10	5	10	2	4	**30,81**	203
100.–101.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	13	10	5	1	3	**30,81**	384
102.	*Thao*	*Tranova*	1	GDomažlice	11	7	11	–	–	**29,55**	30
103.	*Zuzana*	*Tréglová*	4	G Žatec	13	11	6	–	–	**29,19**	249
104.	*Viktor*	*Procházka*	3	G LPika PL	14	9	6	–	–	**29,17**	29
105.	*Ondřej*	*Krabec*	2	G KomHavíř	12	17	–	–	–	**28,99**	166
106.	*Barbora*	*Dohnalová*	0	GBalbínaHK	14	13	–	–	–	**27,30**	27
107.	*Josef*	*Král*	2	MendelG OP	–	14	13	–	–	**27,05**	27
108.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	19	8	–	–	–	**26,72**	48
109.	*Anna*	*Mírková*	2	G LPika PL	17	9	–	–	–	**26,38**	26
110.	*Jan*	*Bohadlo*	3	G Náchod	8	9	9	–	0	**26,34**	26
111.–114.	*David*	*Horský*	1	GHeyrovPH	15	11	–	–	–	**26,27**	26
111.–114.	*Adéla*	*Krylová*	1	SGChomutov	11	10	5	–	–	**26,27**	26
111.–114.	*Lucie*	*Kunčarová*	1	GVolgogrOS	15	11	–	–	–	**26,27**	26
111.–114.	*Michal*	*Stratený*	1	GŠkolDubni	5	11	10	–	–	**26,27**	26
115.	*Anna*	*Šírová*	3	GJilemnice	10	7	9	–	–	**25,84**	96
116.	*Jan*	*Vondra*	1	G TýnNVlt	–	8	8	–	9	**25,47**	25
117.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	4	9	7	2	4	**25,40**	303
118.	*Jakub*	*Čurda*	2	PORG PH	–	9	9	7	–	**25,18**	53
119.	*Alžběta*	*Neubauerová*	3	GNadKavaPH	13	5	7	–	–	**24,99**	156
120.	*Jonáš*	*Suvák*	2	GRaymanaPV	15	9	–	–	–	**24,53**	25
121.	*Dominika*	*Mokroszová*	2	G FrýdČTěš	10	14	–	–	–	**24,31**	132
122.	*Adam*	*Doubrava*	1	GMasarykKM	14	10	–	–	–	**24,11**	139
123.	*Tomáš*	*Jirsa*	3	GNPražačPH	15	8	–	–	–	**23,43**	23
124.	*Peter*	*Debnár*	1	SpojenáŠ	8	15	–	–	–	**23,37**	23
125.	*Tomáš*	*Dolák*	4	GNovéStraš	11	6	6	–	–	**22,56**	34
126.	*Petra*	*Melicharová*	2	GDomažlice	13	9	–	–	–	**22,48**	22
127.	*Přemysl*	*Kaucký*	3	MasG Plzeň	9	7	4	–	1	**21,64**	22
128.	*Filip*	*Brunclík*	3	GNPražačPH	13	8	–	–	–	**21,47**	21
129.	*Marek*	*Heide*	1	GJatečníÚL	11	10	–	–	–	**21,38**	21
130.	*Tomáš*	*Ježo*	2	GJHroncaBA	–	14	7	–	–	**20,81**	21
131.	*Marek*	*Černoch*	1	G ValMez	21	–	–	–	–	**20,67**	21
132.	*Tereza*	*Žmolová*	1	GHeyrovPH	14	7	–	–	–	**20,60**	21
133.–134.	*Adam*	*Ječmínek*	0	G Česká ČB	0	10	10	–	–	**20,22**	20
133.–134.	*Karolína*	*Seďová*	0	ZSDolBoj	–	10	10	–	–	**20,22**	20
135.	*Magdaléna*	*Bártová*	2	GDašickáPA	5	9	5	–	–	**20,02**	20
136.	*Jan*	*Šrejbr*	1	GJungmanLT	15	5	–	–	–	**19,78**	20
137.	*Matej*	*Kvorka*	3	GŠkolDubni	–	10	10	–	–	**19,68**	77
138.	*Martina*	*Hofmanová*	2	G Mělník	9	9	–	–	–	**18,96**	19
139.	*David*	*Ha*	2	MasG Plzeň	12	7	–	–	–	**18,65**	19
140.–141.	*Karel*	*Balej*	2	G Rokycany	19	–	–	–	–	**18,59**	19
140.–141.	*Veronika*	*Zámečníková*	2	GBalbínaHK	19	–	–	–	–	**18,59**	19
142.–143.	*Dita*	*Chabičovská*	1	GNadKavaPH	19	–	–	–	–	**18,52**	19
142.–143.	*Lenka*	*Tomanová*	1	G VelMeziř	19	–	–	–	–	**18,52**	19
144.	*Hana*	*Jirovská*	3	NPorg	4	8	6	–	–	**18,04**	71
145.–146.	*Michal*	*Jireš*	2	GRychnovKn	–	18	–	–	–	**17,77**	18
145.–146.	*Filip*	*Vosáhlo*	2	WaldPHa	18	–	–	–	–	**17,77**	18
147.	*Erik*	*Kočandrle*	2	GMikul23PL	–	11	6	–	–	**17,73**	92

148.	*Daniela*	*Holubová*	1	GMikul23PL	18	–	–	–	–	**17,70**	18
149.	*Václav*	*Kubíček*	3	AGKroměříž	17	–	–	–	–	**17,27**	17
150.	*Jakub*	*Hemala*	2	G Zastávka	17	–	–	–	–	**16,90**	17
151.	*Markéta*	*Petrtýlová*	1	GSRandyJN	7	10	–	–	–	**16,79**	17
152.	*František*	*Szczepanik*	1	BiskG Brno	17	–	–	–	–	**16,59**	17
153.	*Štefan*	*Hollán*	3	G Bytča	16	–	–	–	–	**16,36**	16
154.–155.	*Matúš*	*Galba*	4	GHodžuLM	16	–	–	–	–	**16,00**	16
154.–155.	*Matěj*	*Žáček*	4	GJarošeBO	16	–	–	–	–	**16,00**	16
156.	*Antonín*	*Štrpka*	2	G Šumperk	16	–	–	–	–	**15,83**	42
157.	*Vladimír*	*Lukačko*	3	GVarŽilina	7	8	–	–	–	**15,76**	107
158.–159.	*Alexandra*	*Géciová*	1	GJHroncaBA	7	8	0	–	–	**15,27**	15
158.–159.	*Anežka*	*Novotná*	1	GJeronýmLI	7	8	–	–	–	**15,27**	15
160.	*Karel*	*Müller*	2	GMikul23PL	–	15	–	–	–	**15,05**	15
161.	*František*	*Couf*	4	EKO GPraha	–	–	–	–	15	**15,00**	716
162.–164.	*Alina*	*Mojšová*	1	GNVPlániPH	15	–	–	–	–	**14,89**	15
162.–164.	*Eliška*	*Schůtová*	1	GNZatlanPH	–	15	–	–	–	**14,89**	15
162.–164.	*Samuel*	*Soukup*	1	ArcibisGPH	15	–	–	–	–	**14,89**	15
165.	*Kateřina*	*Mannlová*	3	VOŠp SPgŠ	7	8	0	–	–	**14,79**	15
166.	*Michaela*	*Bobeničová*	2	GPošKošice	5	9	–	–	–	**14,75**	15
167.	*Alžběta*	*Manová*	2	G UherBrod	15	–	–	–	–	**14,65**	75
168.	*Johana*	*Dvořáková*	2	G Trutnov	8	7	–	–	–	**14,64**	39
169.	*Jaromír*	*Mielec*	4	GVolgogrOS	8	7	–	–	–	**14,44**	535
170.	*Martin*	*Števko*	2	GAlejKošic	14	–	–	–	–	**14,14**	149
171.	*Barbora*	*Lišková*	4	GJPekařeMB	3	7	4	–	–	**13,96**	93
172.	*Šárka*	*Míchalová*	2	G Kralupy	7	7	–	–	–	**13,52**	14
173.	*Michal*	*Kasarda*	3	G Stropkov	13	–	–	–	–	**13,47**	13
174.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	8	6	–	–	–	**13,14**	59
175.–177.	*Ondřej*	*Gonzor*	0	G Brandýs	13	–	–	–	–	**13,03**	13
175.–177.	*Kateřina*	*Ševčíková*	0	ZSSLOUP	13	–	–	–	–	**13,03**	13
175.–177.	*Matěj*	*Široký*	0	ZšSmrž	13	–	–	–	–	**13,03**	13
178.–179.	*Tomáš*	*Bajer*	1	SPŠstJG	13	–	–	–	–	**12,64**	13
178.–179.	*Jakub*	*Ucháč*	1	ZŠVranéNVl	–	13	–	–	–	**12,64**	13
180.	*Jana Viktória*	*Kováčiková*	3	GŠkolDubni	4	8	–	–	–	**12,23**	12
181.	*Vojtěch*	*Jílek*	4	VOŠKutHora	8	4	–	–	–	**11,95**	62
182.	*Anna*	*Švarcová*	1	G Prachati	5	–	7	–	–	**11,68**	12
183.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	0	PORG PH	12	–	–	–	–	**11,66**	12
184.	*Martin*	*Simet*	2	GMikul23PL	–	12	–	–	–	**11,63**	50
185.	*Filip*	*Geib*	3	GHodžuLM	11	–	–	–	–	**11,39**	11
186.–188.	*Barbora*	*Česalová*	1	GJarošeBO	11	–	–	–	–	**11,38**	11
186.–188.	*Marie*	*Kalousková*	1	GNadAlejPH	11	–	–	–	–	**11,38**	11
186.–188.	*Marek*	*Otruba*	1	GZborovPH	11	–	–	–	–	**11,38**	11
189.	*Vojta*	*Staněk*	3	PORG PH	–	8	–	3	–	**10,88**	11
190.–191.	*Tereza*	*Pavlišová*	2	GTomkovaOL	11	–	–	–	–	**10,72**	11
190.–191.	*Martin*	*Putzer*	2	G Jírov ČB	11	–	–	–	–	**10,72**	11
192.–193.	*Viktor*	*Materna*	1	GJarošeBO	10	–	–	–	–	**10,00**	10
192.–193.	*Michal*	*Pisca*	4	DievčenOŠ	10	–	–	–	–	**10,00**	10
194.	*Václav*	*Prosser*	2	GMikul23PL	–	9	–	–	–	**9,48**	9
195.	*Tomáš*	*Pishovaký*	2	RGZS Prost	9	–	–	–	–	**9,36**	27
196.	*Matthew*	*Dupraz*	2	NPorg	–	9	–	–	–	**9,33**	31
197.	*Duc Long*	*Hoang*	2	GMikul23PL	–	9	–	–	–	**9,27**	40
198.	*Michaela*	*Šedová*	3	GŽidlochov	9	–	–	–	–	**9,17**	9
199.–201.	*Nikita Edward*	*Carulkov*	4	GMHS	9	–	–	–	–	**9,00**	9

199.–201.	*Kateřina*	*Fuková*	4	GOhradníPH	6	3	–	–	–	**9,00**	9
199.–201.	*Barbora*	*Schererová*	4	GB Sučany	9	–	–	–	–	**9,00**	9
202.–204.	*Ján*	*Kršiak*	1	GTim Lučen	8	–	–	–	–	**8,48**	8
202.–204.	*Stanislav*	*Kvirenc*	1	G Dobruška	8	–	–	–	–	**8,48**	8
202.–204.	*Bronislav*	*Theuer*	1	G Žatec	8	–	–	–	–	**8,48**	8
205.	*Tomáš*	*Svoboda*	3	G Třinec	4	4	–	–	–	**8,46**	8
206.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	ZŠ Slov	–	8	–	–	–	**8,34**	8
207.	*Aneta*	*Haderová*	3	VOŠp SPgŠ	7	1	0	–	–	**8,26**	8
208.–210.	*Peter*	*Brezina*	2	SPŠNitra	8	–	–	–	–	**8,17**	8
208.–210.	*Tereza*	*Kinská*	2	GBNěmcovHK	8	–	–	–	–	**8,17**	8
208.–210.	*Hana*	*Tomanová*	2	GHeyrovPH	8	–	–	–	–	**8,17**	8
211.–214.	*Lukáš*	*Račko*	3	GLettMart	8	–	–	–	–	**8,00**	8
211.–214.	*David*	*Ryzák*	3	G Trutnov	–	8	–	–	–	**8,00**	8
211.–214.	*Jana*	*Staňová*	3	GŠkolDubni	8	–	–	–	–	**8,00**	8
211.–214.	*Matúš*	*Varhaník*	3	G Bytča	8	–	–	–	–	**8,00**	8
215.	*Alexander*	*Csizmár*	2	GMikul23PL	–	–	8	–	–	**7,96**	41
216.	*Laura*	*Špaková*	2	G Kežmarok	2	5	–	–	–	**7,18**	7
217.–220.	*Alice*	*Janáčková*	1	G Chotěboř	7	–	–	–	–	**6,79**	7
217.–220.	*Matouš*	*Moravec*	1	PORG PH	–	–	7	–	–	**6,79**	7
217.–220.	*Adam*	*Vavrečka*	1	GBezručeFM	7	–	–	–	–	**6,79**	7
217.–220.	*Václav*	*Zvoníček*	1	GJarošeBO	7	–	–	–	–	**6,79**	7
221.–223.	*Denisa*	*Jandová*	2	GMikul23PL	–	–	7	–	–	**6,76**	7
221.–223.	*Tomáš*	*Sládek*	2	SŠNvh	–	7	–	–	–	**6,76**	7
221.–223.	*Linh Giang*	*Tran*	2	GMikul23PL	–	–	7	–	–	**6,76**	7
224.	*Karolína*	*Tulingerová*	2	AkademG PH	7	–	–	–	–	**6,72**	15
225.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	–	6	–	–	–	**5,88**	241
226.	*Vojtěch*	*Lengál*	3	GZborovPH	–	–	–	–	6	**5,62**	150
227.	*Dominik*	*Bartošek*	3	SŠŽivSokol	6	–	–	–	–	**5,53**	6
228.–229.	*Jan*	*Česnek*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	**5,27**	5
228.–229.	*Aneta*	*Titzová*	2	GJarošeBO	5	0	–	–	–	**5,27**	5
230.	*Ha Mi*	*Dao*	2	GŠmejkalÚL	5	–	–	–	–	**5,13**	32
231.	*Vladimír*	*Kelbl*	4	GJarošeBO	5	–	–	–	–	**5,00**	5
232.–233.	*Jiří*	*Janoušek*	1	GBudějovPH	5	–	–	–	–	**4,89**	5
232.–233.	*Petra*	*Šimonovská*	1	OA Dušní	–	5	–	–	–	**4,89**	5
234.	*Jakub*	*Horyna*	4	GNVPlániPH	5	–	–	–	–	**4,83**	22
235.	*Patrik*	*Beliansky*	3	SŠNvh	4	–	–	–	–	**4,23**	4
236.	*Michal*	*Rickwood*	3	G ČTřebová	4	–	–	–	–	**4,21**	9
237.–238.	*Markéta*	*Machalová*	4	WichtG OS	3	–	1	–	–	**4,00**	4
237.–238.	*Monika*	*Matoušková*	4	G MasNámTŘ	–	4	–	–	–	**4,00**	4
239.	*Anna*	*Tritschlerová*	0	GCON ČesBuď	0	4	–	–	–	**3,66**	4
240.	*Marika*	*Šejblová*	3	VOŠp SPgŠ	3	–	–	–	–	**2,88**	3
241.–243.	*Lukáš*	*Antoš*	2	G Turnov	–	–	2	–	–	**1,91**	2
241.–243.	*Kateřina*	*Malcánková*	2	GJarošeBO	–	2	–	–	–	**1,91**	2
241.–243.	*Monika*	*Suchá*	2	GMikul23PL	–	2	–	–	–	**1,91**	2
244.	*Miroslav*	*Beláčik*	3	SpojenáŠ	–	–	1	–	–	**1,47**	1
245.–250.	*Iveta*	*Drašarová*	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	–	0	**0,00**	0
245.–250.	*Michaela*	*Holcová*	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	–	0	**0,00**	0
245.–250.	*Anna*	*Jandová*	2	G Leg PB	0	–	–	–	–	**0,00**	40
245.–250.	*Filip*	*Kubálek*	1	GNeumannŽR	0	–	–	–	–	**0,00**	0
245.–250.	*Milan*	*Šaržík*	3	G Púchov	0	–	–	–	–	**0,00**	0
245.–250.	*Petra*	*Vávrová*	3	VOŠp SPgŠ	0	–	–	–	–	**0,00**	0

1. jarní série – Rozdělování

Výsledková listina

1.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
2.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	$25 - i$	**24,22**
3.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 – 5	23	**23,95**
4.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	3 3 3 5 5 5 – –	21	**23,88**
5.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	3 3 3 5 5 5 – 5	23	**23,44**
6.–7.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	3 3 3 5 5 5 – –	21	**23,42**
6.–7.	*Jakub*	*Parada*	1	G Gröss BA	3 – 3 5 1 5 – 5	21	**23,42**
8.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,17**
9.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	– 3 3 5 5 5 – –	21	**22,84**
10.–11.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	– – – 3 5 5 5 5	23	**22,43**
10.–11.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
12.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	– 3 3 5 – 5 – 5	$21 + i$	**22,37**
13.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	3 – 3 5 5 5 – –	21	**22,33**
14.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	3 3 2 5 4 5 – –	20	**22,04**
15.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	3 – 3 5 5 5 – –	21	**21,67**
16.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	3 0 3 5 5 – – –	16	**21,64**
17.–18.	*Jakub*	*Růžička*	2	G Nymburk	3 3 3 5 0 5 – –	19	**21,52**
17.–18.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
19.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	3 3 1 5 5 5 – –	21	**21,47**
20.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	3 3 3 5 4 5 – –	20	**21,12**
21.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	**20,91**
22.–23.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	3 3 3 5 – 5 – –	19	**20,84**
22.–23.	*Jaromír*	*Sladkovský*	2	PORG PH	3 3 3 5 4 – – –	18	**20,84**
24.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	3 3 3 5 – 5 – –	19	**20,63**
25.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	3 3 3 5 – 5 – –	19	**20,53**
26.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	3 3 3 5 – 5 – –	19	**20,30**
27.	*Šimon*	*Chvátil*	2	GBNěmcovHK	3 3 3 4 0 5 – –	18	**20,24**
28.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	3 3 3 5 5 5 – –	21	**19,88**
29.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	3 3 – 5 5 5 – –	21	**19,81**
30.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	3 3 3 5 5 5 – –	21	**19,67**
31.	*Evžen*	*Wybitul*	3		3 3 3 5 4 – – –	18	**19,06**
32.	*Jakub*	*Suchánek*	3	GOpatovPH	– – 3 5 1 5 – 3	17	**19,00**
33.–34.	*Alexandra*	*Géciová*	1	GJHroncaBA	3 3 3 4 – – – –	13	**18,52**
33.–34.	*Martin*	*Hubata*	1	GMikul23PL	3 0 3 5 2 – – –	13	**18,52**
35.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 3 3 5 – – – –	14	**18,29**
36.	*David*	*Ryzák*	3	G Trutnov	3 0 3 5 – 5 – –	16	**18,15**
37.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	3 3 3 5 4 5 0 –	$20 + i$	**17,98**
38.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	3 3 3 5 4 4 – –	19	**17,38**
39.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	3 3 3 5 – – – –	14	**16,98**
40.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	3 3 3 5 – – – –	14	**16,87**

41.	*Ludmila*	*Bujnovská*	3	MendelG OP	3 3 3 5 – – – –	14	**16,36**
42.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	3 3 2 4 1 – – –	13	**16,16**
43.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	3 3 3 4 – – – –	13	**16,10**
44.	*Martin*	*Pašen*	4	GRaymanaPV	3 – 3 5 5 1 – –	17	**15,73**
45.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	3 0 3 5 4 – – –	15	**15,26**
46.	*Veronika*	*Roubínová*	3	G Kadaň	3 3 3 5 – – – –	14	**15,24**
47.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	3 3 3 5 – – – –	14	**15,18**
48.	*Petr*	*Ježek*	3	GBNěmcovHK	3 3 3 5 – – – –	14	**15,06**
49.–50.	*David*	*Klement*	1	GNadAlejPH	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
49.–50.	*Tatiana*	*Ondrejková*	1	GNovéZámky	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
51.	*Michal*	*Chudoba*	2	GLitoměřPH	3 0 3 5 – – – –	11	**14,47**
52.	*Matěj*	*Krátký*	1	PORG PH	3 0 – 5 – – – –	8	**13,81**
53.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	– – 3 5 – 5 – –	13	**13,49**
54.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	3 – 3 5 – – – –	11	**13,47**
55.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	3 0 3 4 – – – –	10	**13,42**
56.	*Karel*	*Balej*	2	G Rokycany	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
57.–58.	*Julie*	*Přerovská*	1	GNVPlániPH	3 0 3 – 1 – – –	7	**12,64**
57.–58.	*Veronika*	*Šritterová*	1	PORG PH	3 0 3 – – – 1 –	7	**12,64**
59.	*Jan*	*Hrůza*	4	G Kadaň	3 3 3 5 – – – –	14	**12,61**
60.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	3 0 3 – – 5 – –	11	**12,34**
61.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	3 3 3 – – 5 – –	14	**12,10**
62.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	ZŠ Slov	– – – 5 – – – –	5	**11,66**
63.–64.	*Radka*	*Křížová*	1	GHeyrovPH	3 0 3 – – – – –	6	**11,38**
63.–64.	*Jan*	*Vondra*	1	G TýnNVlt	3 – 3 – – – 0 –	6	**11,38**
65.	*Vojtěch*	*Šára*	2	PORG PH	– 0 3 4 0 – – –	7	**10,72**
66.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	3 3 3 – – – – –	9	**10,64**
67.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	3 3 3 4 – – – –	13	**9,63**
68.	*Magdaléna*	*Bártová*	2	GDašickáPA	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
69.	*Ondřej*	*Dušek*	3	PORG PH	– 0 3 5 – – – –	8	**9,36**
70.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	3 0 3 – – – – –	6	**9,11**
71.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	3 0 3 – – – – –	6	**8,64**
72.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	– 0 3 0 – – 1 –	4	**8,48**
73.	*Julie*	*Rubášová*	0	BiskG Brno	3 0 – 0 0 – – –	3	**8,34**
74.–75.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	2 0 2 4 0 – – –	8	**8,00**
74.–75.	*Vojta*	*Staněk*	3	PORG PH	3 0 3 – – – – –	6	**8,00**
76.	*Anna*	*Šírová*	3	GJilemnice	– – 3 3 – – – –	6	**7,49**
77.–79.	*Dita*	*Chabičovská*	1	GNadKavaPH	– 0 3 – – – – –	3	**6,79**
77.–79.	*Matouš*	*Moravec*	1	PORG PH	– – 3 – – – – –	3	**6,79**
77.–79.	*Anna*	*Švarcová*	1	G Prachati	– 3 0 0 0 0 0 –	3	**6,79**
80.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	3 3 3 – – – – –	9	**6,53**
81.	*Anna*	*Musilová*	1	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**6,20**
82.	*Filip*	*Chudoba*	3	PORG PH	2 0 3 – – – – –	$5 + i$	**5,86**
83.	*David*	*Šnajdr*	2	GMikul23PL	3 – – – – – – –	3	**5,27**
84.	*Matej*	*Kvorka*	3	GŠkolDubni	1 0 3 – – – – –	4	**5,21**
85.	*Jakub*	*Čurda*	2	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**5,13**
86.	*Adam*	*Ječmínek*	0	G Česká ČB	1 0 – 0 – – – –	1	**3,66**
87.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	– 0 2 – – – – –	2	**3,65**
88.–90.	*Martina*	*Hofmanová*	2	G Mělník	– 0 – – – – – –	0	**0,00**
88.–90.	*Denisa*	*Jandová*	2	GMikul23PL	– 0 – – – – – –	0	**0,00**
88.–90.	*Tomáš*	*Konečný*	4	GJirsíkaČB	– 0 – – – – – –	0	**0,00**

2. seriálová série – Geometrie trojúhelníka 2

Výsledková listina

1.–14.	*František*	*Couf*	4	EKO GPraha	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	5	5	5	15	**15,00**
1.–14.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	5	5	5	15	**15,00**
15.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	5	5	–	10	**13,20**
16.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	5	5	–	$10+i$	**11,70**
17.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	5	5	–	10	**11,41**
18.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	5	5	–	10	**11,39**
19.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	4	5	–	9	**11,15**
20.	*Jakub*	*Suchánek*	3	GOpatovPH	5	5	–	$10-i$	**11,00**
21.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	5	–	–	5	**7,45**
22.	*Jakub*	*Růžička*	2	G Nymburk	5	–	–	5	**7,36**
23.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	5	–	–	5	**6,86**
24.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	5	–	–	5	**6,40**
25.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	–	5	–	5	**6,30**
26.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	2	5	–	7	**5,80**
27.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	–	5	–	5	**5,32**
28.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	1	5	–	$6+i$	**5,04**
29.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	5	0	–	5	**4,00**
30.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	2	0	–	2	**2,00**
31.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	–	–	0	0	**0,00**

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*