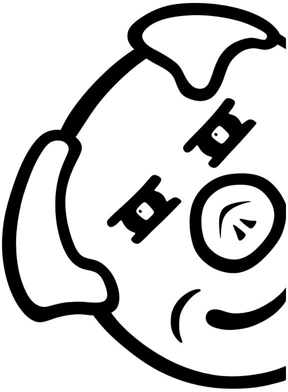
Matematický
korespondenční
seminář

Milý příteli!



Příroda je již celá v květu a v pestrých barvách, nám však seminář jdoucí ruku v ruce se školním rokem pomalu odkvétá. Finální myš-maš – poslední jarní série – zfinalizoval i letošní, již 36. ročník, matematického korespondenčního semináře. V jarní části se podařilo nejvíce bodů získat *Danilu Koževnikovi*, který tak ještě navýšil svůj náskok v celém letošním ročníku před druhým *Pavlem Turkem* a třetím *Pavlem Hudcem* a s přehledem letošní ročník vyhrál. Nejen výše zmíněným, ale i Tobě a všem řešitelům a příznivcům PraSete blahopřejeme, děkujeme za účast a doufáme, že se s Tebou budeme i nadále setkávat v příštím roce. A to ať již jako s účastníkem, orgem či celoživotním přítelem a příznivcem našeho semináře.

Kromě opravených a vzorových řešení posledních sérií se Ti do rukou dostává i zadání první a druhé podzimní série. Ač jsou tyto série podzimní, můžeš si jejich řešením samozřejmě zpříjemnit a zpestřit i průběh letních prázdnin a na podzim se těšit na další seriál. Rovněž doporučujeme ke čtení mimořádný, bonusový čtvrtý díl seriálu, který pro Tebe tento rok psali *David Hruška* a *Rado van Švarc*. Ten již neobsahuje žádné bodované úlohy a výsledky neovlivní, avšak stále je plný krásné geometrie, a je tak velmi vhodný například jako čtivo na pláž či v parném dni do stínu stromů.

Doufáme, že se Ti letošní ročník líbil, rozšířil obzor Tvých znalostí, přidal některé netradiční úhly pohledu nejen na řešení problémů a podpořil myšlenku, že matematika je krásná věda. Budeme se i v dalším roce spolu s Tvou pomocí snažit, aby PraSe i nadále mělo tyto i další přínosy a spojovalo lidi rádi přemýšlející.

Za všechny organizátory zdraví a krásné prázdniny přeje,

Honza Kadlec

Obsah závěrečných komentářů

- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Bonusový čtvrtý díl seriálu – Geometrie trojúhelníka IV.
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 37. ročníku

Závěrečná anketa

Na stránce *mks.mff.cuni.cz/anketa* na Tebe čeká anketa o tom, co se Ti v PraSeti líbí a co bys naopak dělal(a) jinak. Můžeš nám říct, proč seminář řešíš nebo jaká témata sérií by sis do budoucna přál(a). Zpětná vazba je pro nás důležitá, a proto budeme moc rádi, když ji vyplníš.

Jarní soustředění

Nejlepší řešitelé podzimní části semináře se potkali na jarním soustředění, které se uskutečnilo 15. – 23. dubna ve Vižňově. Tématem bylo tentokrát Ledové království, jehož královna se trápila kvůli nešťastné

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

lásce a zmrazila celý okolní svět. Naštěstí ale jen sněžilo, naše hlavy zůstaly v pořádku, a tak jsme společně řešili úlohy na přednáškách, hráli hry a nakonec jsme jí pomohli k jejímu vyvolenému, aby mohlo zase začít jaro.

Stereometrie

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Stěnové úhlopříčky kvádru mají délky a, b a c. Jakou délku má jeho tělesová úhlopříčka?

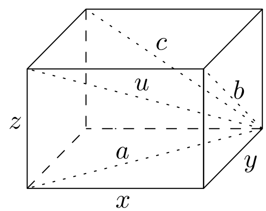
(Martin „E.T." Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Označme délku tělesové úhlopříčky a hran daného kvádru po řadě u, x, y, z tak, aby platilo:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2, \\ b^2 &= y^2 + z^2, \\ c^2 &= x^2 + z^2. \end{aligned}$$

To je podle Pythagorovy věty možné – stačí hrany označit jako na obrázku.



Dále z Pythagorovy věty a první rovnosti platí, že $u^2 = a^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Sečtením prvních tří rovností získáváme $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$, tedy $u^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Odmocněním tohoto vztahu získáme hledané vyjádření délky tělesové úhlopříčky:

$$u = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

POZNÁMKY:

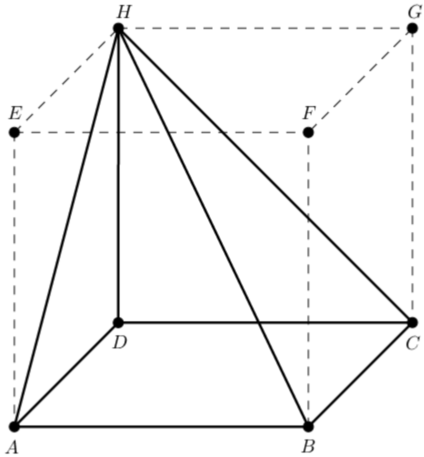
Drtivá většina řešitelů si s úlohou poradila. Ti, kteří zvolili metodu uvedenou ve vzorovém řešení, získali imaginární bod navíc, protože si ušetřili poměrně složité vyjadřování x, y a z pomocí a, b a c. I to ale samozřejmě vedlo k cíli. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Úloha 2.

Když Mirek umřel, rozhodla se mu ostatní PraSátka postavit monumentální hrobku ve tvaru „pravoúhlé pyramidy", tedy čtyřbokého jehlanu se všemi trojúhelníkovými stěnami pravoúhlými. Poraďte jim, jak by taková pyramida měla vypadat. Tedy pokud takové pyramidy existují, určete délky hran jedné z nich, jinak vysvětlete, proč neexistují.

Řešení:

Takové pyramidy existují. Například tento čtyřboký jehlan $ABCDH$ v krychli $ABCDEFGH$:



Úhly BCH a BAH jsou pravé, jelikož sousední stěny krychle jsou na sebe kolmé. Úhly ADH, CDH jsou též pravé, jelikož stěnou krychle je čtverec. Zadání je splněno.

Zbývá dopočítat délku hran nalezeného jehlanu. Označme a velikost hrany krychle. Z Pythagorovy věty je pak velikost stěnové úhlopříčky rovna $\sqrt{2}a$ a velikost tělesové úhlopříčky rovna $\sqrt{3}a$. Tedy $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |DH| = a$, $|AH| = |CH| = \sqrt{2}a$ a $|BH| = \sqrt{3}a$.

Poznámky:

Většina řešitelů si s úlohou snadno poradila a našla jehlan podobný vzorovému. Asi nejčastější chybou bylo, že navržený jehlan ve skutečnosti nebyl jehlanem, jelikož se jeho hlavní vrchol nacházel v rovině podstavy. *(Lucien Šíma)*

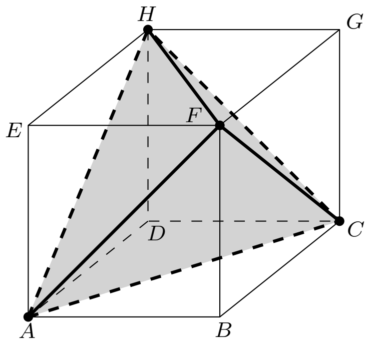
Úloha 3.

Když si Kuba hrál se svým oblíbeným pravidelným čtyřstěnem, všiml si, že na zem vrhá čtvercový stín. Je to možné, nebo měl jen halucinace? Svou odpověď podrobně dokažte. Předpokládejte, že máme jeden zdroj světla umístěný v nekonečnu, takže jsou světelné paprsky rovnoběžné.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Je to možné. Uvažme krychli $ABCDEFGH$. Uvažme čtyřstěn, jehož vrcholy umístěme do vrcholů $ACFH$. Každá hrana čtyřstěnu je stěnovou úhlopříčkou krychle, tedy jsou všechny stejně dlouhé, proto je čtyřstěn pravidelný. Nyní už stačí zvolit směr paprsků kolmý na libovolnou stěnu krychle. Vrcholy čtyřstěnu se zobrazí na vrcholy protější stěny a hrany čtyřstěnu na strany této stěny. Každá stěna krychle je čtverec, což je přesně stín uvažovaného čtyřstěnu.



Poznámky:

Úloha nebyla nikterak složitá, tedy většina řešitelů zvládla úlohu bez potíží. Ne všichni zvolili stejný postup. Někteří však měli problémy s popsáním správného řešení matematicky.

(Adéla Kostelecká)

Úloha 4.

Kolem Slunce obíhalo do roku 2006 devět planet. Slunce považujeme za kouli, planety za body v prostoru. Ukažte, že na Slunci existoval bod, z nějž byly vidět nejvýše tři planety.[1]

(Anh Dung „Tonda“ Le)

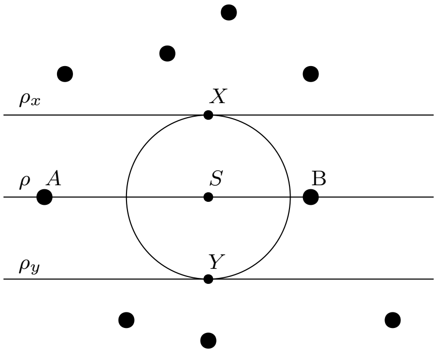
Řešení:

Střed Slunce si označíme S. Vybereme si libovolné dvě planety a označíme si je A a B. Nechť ρ je rovina daná body S, A a B (nebo libovolná z rovin, ve které všechny tyto body leží, jsou-li na jedné přímce). Dále nechť ρ_x a ρ_y jsou (různé) roviny tečné ke Slunci rovnoběžné s rovinou ρ a nechť X, Y jsou příslušné body doteku.

Podíváme se, kolik planet je vidět z bodů X a Y. Vzhledem k tomu, že rovina ρ vůbec nezasahuje ani do jednoho z poloprostorů viditelných z X a z Y, planety A a B nejsou ani z jednoho z těchto bodů vidět. Též si všimneme, že poloprostory ohraničené rovinami ρ_x a ρ_y neobsahující Slunce jsou disjunktní. To znamená, že žádná planeta nemůže být viditelná z bodu X i z bodu Y.

Planet je dohromady devět, z toho dvě nejsou vidět z ani jednoho z bodů X, Y a zbývajících sedm vždy nejvýše z jednoho z nich. To už ale nutně znamená, že z jednoho z bodů X, Y jsou vidět nejvýše tři planety, což jsme chtěli ukázat.

[1] Planeta je viditelná z bodu A na povrchu Slunce, pokud se nalézá v poloprostoru, který má hraniční rovinu tečnou ke Slunci v bodě A a neobsahuje Slunce. Do poloprostoru zahrnujeme i hraniční rovinu.



Projekce na rovinu kolmou na ρ. Ze všech použitých rovin se v této projekci stanou přímky.

Poznámky:
Zhruba polovina řešitelů kopírovala vzorák. Polovina zbytku využila tvrzení, že vzhledem k tomu, že jsou planety v konečné vzdálenosti od Slunce, z každé planety je vidět (ostře) méně než polovina libovolné hlavní kružnice na povrchu Slunce. Z toho plyne, že z každé planety musí být viditelný nějaký bod každé hlavní kružnice (jinak by náhodně zvolený bod na kružnici byl v průměru vidět z méně než čtyř planet), což už snadno vede ke sporu. Celkově se však většinou jednalo o delší řešení, než byla ta, která postupovala podle vzoráku.

Zbývající čtvrtina řešení byla špatně. Zdaleka nejčastější chybou bylo, že si řešitel přidal do zadání nějaké další předpoklady. Typicky se jednalo o předpoklad, že se všechny planety nacházejí (přibližně) v jedné rovině, v několika případech i konkrétní vzdálenosti reálných planet od Slunce.

Nic takového ovšem v zadání nebylo, ač uznáváme, že k takové interpretaci formulace se Sluncem mohla mírně svádět.

Též bych chtěl připomenout, že řešení má být sepsáno tak, aby mu kdokoli, kdo ovládá příslušné matematické pojmy, bez obtíží porozuměl. U geometrických úloh řešených synteticky je často téměř nemožné napsat srozumitelné řešení bez náčrtku. Tato úloha byla z tohoto pravidla do jisté míry výjimkou, protože se dala vyřešit i s několika málo útvary. Přesto přišlo několik řešení, která zaváděla nová značení a používala různé projekce do roviny, které se špatně představují, aniž by k nim dodala jakýkoli obrázek. *(Viki Němeček)*

Úloha 5.

Ježibaba Zuzka dala princi Pepovi za úkol rozdělit pětiboký kolmý hranol na jehlany s podstavami v podstavách daného hranolu. Podaří se mu to a zachrání princeznu, nebo jí propadne hrdlem?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Ukážeme, že úkol splnit nelze.

Označme v výšku hranolu, S obsah podstavy a V objem hranolu. Potom tedy $V = S \cdot v$. Mějme několik vzájemně se nepřekrývajících jehlanů obsažených v hranolu s podstavami v podstavách hranolu. Jejich výšky označme $v_1, \ldots, v_n$, obsahy jejich podstav $S_1, \ldots, S_n$, a konečně objemy $V_1, \ldots, V_n$.

Výška každého jehlanu je maximálně v, a jelikož se jehlany nepřekrývají, je součet obsahů jejich podstav maximálně $2S$. Máme tedy

$$V_1+\cdots+V_n = \frac{S_1 \cdot v_i}{3}+\cdots+\frac{S_n \cdot v_n}{3} \leq \frac{S_1 \cdot v}{3}+\cdots+\frac{S_n \cdot v}{3} = \frac{1}{3}v(S_1+\cdots+S_n) \leq \frac{1}{3}v\cdot 2S = \frac{2}{3}V < V.$$

Tedy jehlany mají dohromady menší objem než hranol. Jelikož byla volba jehlanů libovolná, ukázali jsme, že hranol požadovaným způsobem rozdělit nelze.

Poznámky:
Většina řešení byla shodná se vzorovým. Ti, kteří tvrdili, že hranol rozdělit lze, si nejčastěji prostě nevšimli, že při jejich rozdělení jim kromě vyhovujících jehlanů zbylo z hranolu i něco navíc.

Imaginární bod si vysloužil řešitel, který svoje řešení sepsal jako velmi čtivou pohádku o princi Pepovi a ježibabě. V jeho příběhu ale Pepa vyhrál podvodem, a tak jsem nemohl udělit body a konec jeho příběhu musel přepsat podle pravdy… *(Tonda Češík)*

Úloha 6.

V prostoru se vznáší kružnice k a bod A mimo rovinu danou kružnicí k. Označme B kolmou projekci bodu A do dané roviny. Uvažme libovolný bod C kružnice k a kolmou projekci D bodu B na přímku AC. Ukažte, že existuje kružnice l taková, že nezávisle na volbě bodu C bude bod D ležet na l.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Pro začátek si povšimneme, že úhel ADB je pravý, proložíme-li tedy těmito třemi body rovinu, bod D bude ležet na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Bod D tedy bude vždy ležet na sféře, jejíž průměr je AB. Tuto sféru si označíme T. Střed kružnice k si označme S.

Řešení pomocí mocnosti ke sféře:
Trojúhelníky ABC a ADB jsou si podobné (mají stejný úhel u A a pravý úhel u B, respektive D), proto

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

a tedy $|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$. Zvolme pevně bod C_0 na k a jemu příslušný bod na AC_0 označme D_0. Uvažme nyní sféru U, která obsahuje kružnici k a bod D_0 (taková určitě existuje). Označme E průnik této sféry a přímky AC (různý od C, nejedná-li se o tečnu). Potom z mocnosti k sféře[2] U vyplývá, že pro libovolný bod C z k platí

$$|AC| \cdot |AE| = |AC_0| \cdot |AD_0| = |AB|^2 = |AC| \cdot |AD|.$$

Bod D_0 leží na polopřímce AC_0, sféra U neobsahuje bod A, proto všechny body E leží na polopřímkách AC. Bod A neleží v rovině kružnice k, tedy $|AC| \neq 0$ a můžeme proto vydělit vztah $|AC|$. Dostaneme

$$|AE| = |AD|,$$

což spolu s faktem, že E a D leží ve stejné polopřímce AC dává, že $D = E$. Všechny body D tedy leží na průniku sfér U a T, který je neprázdný (obsahuje bod D_0), jedná se tedy o bod, nebo kružnici, čímž je úloha vyřešena.

Analytické řešení (podle Pavla Hudce):
Bez újmy na obecnosti kružnice k leží v rovině $[x, y, -2]$. Zvolme souřadnice bodu A jako $[0, 0, 0]$ a bodu B jako $[0, 0, -2]$. Sféra T je tedy jednotková se středem v $[0, 0, -1]$ a je zadána rovnicí $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$, kterou upravíme na tvar

$$x^2 + y^2 = -z^2 - 2z.$$

[2] Mocnost ke sféře je pojem analogický mocnosti ke kružnici – pro libovolný bod X a libovolnou sféru U platí, že pokud bodem X povedeme přímku ℓ protínající U v bodech Y a Z, bude hodnota $|XY| \cdot |XZ|$ vždy stejná nezávisle na volbě ℓ. To lze jednoduše nahlédnout: Vezměme si kterékoliv dvě přímky ℓ_1 a ℓ_2 procházející X. Průsečík U a roviny určené ℓ_1 a ℓ_2 je kružnice, takže v této rovině stačí aplikovat mocnost bodu X k této kružnici.

Průnik kuželové plochy tvořené přímkami AC a roviny $[x, y, z]$ pro fixní z bude kružnice. Její poloměr i souřadnice jejího středu se mění lineárně v závislosti na z, navíc pro $z = 0$ je tento poloměr 0 a střed je $[0, 0, 0]$. Kružnice se tak dá vyjádřit rovnicí

$$(x - lz)^2 + (y - mz)^2 = (nz)^2,$$

kde parametry l, m, n jsou konstantní (tedy nezávisí na x, y ani z). Tento vztah tak platí pro každý bod kuželové plochy, neboť každý její bod leží na nějaké takové kružnici. Protože bod D ze zadání leží na průniku T a kuželové plochy, musí pro něj platit oba odvozené vztahy. Proto je můžeme odečíst a upravit, dostaneme

$$(-2lx - 2my + (l^2 + m^2 - n^2 - 1)z)z = 2z.$$

Víme, že nikdy nedostaneme postupem ze zadání bod D, který by měl třetí souřadnici nulovou, můžeme proto obě strany vydělit číslem z. Rovnice

$$-2lx - 2my + (l^2 + m^2 - n^2 - 1)z = 2$$

určuje rovinu[3], pokud tedy z omezíme na interval $[-2, 0)$, všechny body splňující tento vztah leží v jedné rovině. Jejich množina je tedy průnik této roviny se sférou K, což může být prázdná množina, bod, nebo kružnice. Víme, že prázdná není, takže je to bod, nebo kružnice. Všechny možné body D tedy leží na jedné kružnici.

Poznámky:
Na úloze si mnozí řešitelé vylámali zuby kvůli třetímu rozměru – šikmý kužel s vrcholem A a podstavou k totiž často nefunguje tak, jak bychom očekávali (například osa tohoto kužele není AS; řez kolmý na AS ani na osu obecně není kružnice, ale elipsa). Ač se o to dost lidí pokoušelo, nikomu se přes podobnost trojúhelníků nepodařilo dokázat, že jsou si kužely (A, k) a (A, l) podobné. Muselo by se totiž ukázat, že páry trojúhelníků na jednotlivých řezech kužele jsou si podobné se stejným koeficientem. V tomto případě skutečně bylo snazší ukázat, že body D leží v průniku dvou sfér než že leží v jedné rovině.

Kromě zde uvedených řešení bylo možné úlohu vyřešit pomocí stereografické projekce nebo sférické inverze. Stereografická projekce je zobrazení, které má mimo jiné tu vlastnost, že *vzorem* každé kružnice v rovině je kružnice na sféře. Tato vlastnost ale není zřejmá a nepovažuje se za obecně známou, je proto potřeba ji dokázat či se na příslušný důkaz odkázat. Sférická inverze je obdoba kruhové inverze ve třech rozměrech, která má velmi podobné vlastnosti, zde se použila inverze podle sféry se středem A a poloměrem AB.

Zcela správná řešení se nakonec sešla čtyři, jedno analytické, dvě využívající sférickou inverzi a jedno pomocí stereografické projekce. První tři si vysloužila imaginární bod, neboť byla elegantní, ačkoliv postupovala zcela odlišně od námi zamýšleného vzorového řešení. :) *(Anička Doležalová)*

Úloha 7.

Mějme dánu sféru[4] *a body A, B, C a D takové, že každá z úseček AB, BC, CD, DA se dané sféry dotýká. Dokažte, že tyto čtyři body dotyku leží v jedné rovině.*

(David Hruška)

[3] Skutečně se nikdy nestane, že by koeficienty u všech tří souřadnic byly nulové; pokud $l = m = 0$, pak u z je koeficient $-n^2 - 1$, který je záporný.

[4] Sféra se středem v bodě S a poloměrem r je množina bodů v prostoru, které mají od S vzdálenost r.

Řešení:
Nechť K, L, M, N jsou postupně body dotyku úseček AB, BC, CD, resp. DA se sférou. Platí, že všechny tečny ke sféře z bodu mimo ni jsou stejně dlouhé, tudíž máme následující rovnosti:

$$|AN| = |AK|,\ |BK| = |BL|,\ |CL| = |CM|,\ |DM| = |DN|.$$

Řešení pomocí Menelaovy věty:
Body A, C, K, L leží na přímkách BA, BC, tedy v jedné rovině. Analogicky leží A, C, M, N také v jedné rovině. Nejprve předpokládejme, že ani jedna z přímek KL, MN není rovnoběžná s AC. Nechť X, Y jsou průsečíky přímky AC s KL, MN. Použijeme-li Menelaovu větu na přímku KL a trojúhelník ABC v kombinaci s rovností tečen z bodu B, dostaneme:

$$\frac{|XA||KB||LC|}{|XC||KA||LB|} = 1 \Rightarrow \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|KA||LB|}{|KB||LC|} = \frac{|KA|}{|LC|}\,.$$

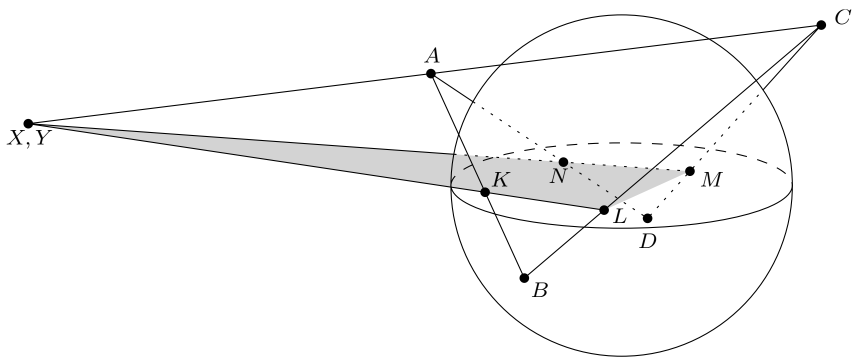
Analogicky použijeme Menelaovu větu na přímku MN a trojúhelník ADC:

$$\frac{|YA||ND||MC|}{|YC||NA||MD|} = 1 \Rightarrow \frac{|YA|}{|YC|} = \frac{|NA||MD|}{|ND||MC|} = \frac{|NA|}{|MC|}\,.$$

Nakonec tyto výsledky porovnáme:

$$\frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|KA|}{|LC|} = \frac{|NA|}{|MC|} = \frac{|YA|}{|YC|}\,.$$

Navíc oba body X, Y leží mimo úsečku AC, a proto se jedná o tentýž bod, což dává, že KL a MN mají průsečík, tudíž body K, L, M, N leží v jedné rovině.



Analytické řešení:
BÚNO předpokládejme, že rovina $z = 0$ obsahuje K, L, M. Nechť pro bod T značí z_T a P_T postupně z-ovou souřadnici bodu T a projekci bodu T na rovinu $z = 0$.

Leží-li A v rovině $z = 0$, pak tam leží i B, C, D a úloha je triviální. Předpokládejme tedy, že z_A je kladné, pak z_B je záporné, z_C je kladné a z_D je záporné. Rovina $z = 0$ tedy protne úsečku AD ve vnitřním bodě, který označíme H. Chceme ukázat, že H je N. K tomu stačí, aby H, N dělily úsečku AC ve stejném poměru. Přímky AP_A, BP_B jsou kolmé na rovinu $z = 0$, a proto jsou navzájem rovnoběžné, což nám dává:

$$\triangle AP_AK \sim \triangle BP_BK \Rightarrow \frac{|AP_A|}{|BP_B|} = \frac{|AK|}{|BK|}\,.$$

Analogicky

$$\frac{|BP_B|}{|CP_C|} = \frac{|BL|}{|CL|}, \frac{|CP_C|}{|DP_D|} = \frac{|CM|}{|DM|}, \frac{|DP_D|}{|AP_A|} = \frac{|DH|}{|AH|}.$$

Nyní stačí kombinovat předchozí výsledky:

$$\frac{|DH|}{|AH|} = \frac{|DP_D|}{|AP_A|} = \frac{|DP_D||CP_C||BP_B|}{|CP_C||BP_B||AP_A|} = \frac{|DM||CL||BK|}{|CM||BL||AK|} = \frac{|DM|}{|AK|} = \frac{|DN|}{|AN|}.$$

Poznámky:

Úloha se ukázala být těžší, než jsem čekal. Většina správných řešení postupovala podle druhého vzorového řešení, které znázorňuje častou techniku při práci se stereometrickými úlohami, a to se snažit promítat konfiguraci do vhodné roviny, kde už máme více zkušeností a lepší intuici. První řešení je sice trikovější, demonstruje však použití Menelaovy věty, kterou se hodí znát, obzvlášť v úloze s tečnami, neboť ty mají stejnou délku a ve výsledném vzorci se pokrátí.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

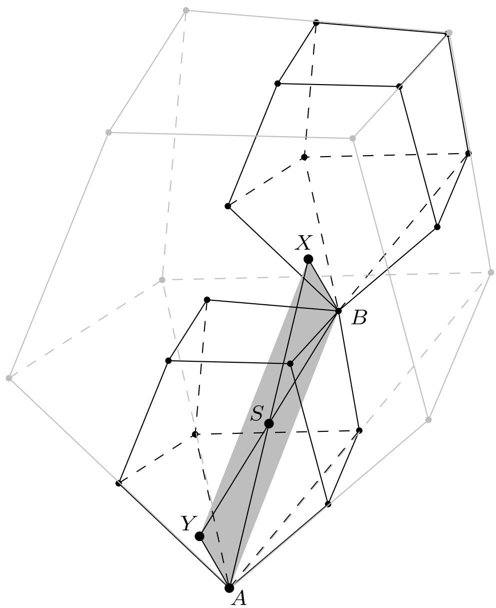
Úloha 8.

Mějme konvexní mnohostěn s devíti vrcholy. Zvolíme jeden jeho vrchol a mnohostěn osmkrát posuneme tak, že při každém posunutí se tento vrchol přesune do nějakého jiného vrcholu zadaného tělesa. Rozhodněte, zda nějaké dva ze vzniklých devíti shodných mnohostěnů musí mít průnik s nenulovým objemem.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme si náš mnohostěn jako $\mathcal{M}$ a náš „základní“ vrchol jako A. Buď $\mathcal{N}$ mnohostěn, který vznikne stejnolehlostí se středem v A a koeficientem 2. Ukážeme, že každý z našich posunutých mnohostěnů (a také ten původní) je celý v $\mathcal{N}$. Pak už jednoduše dostaneme, že nějaké dva mají průnik s nenulovým objemem: Pokud je objem $\mathcal{M}$ roven V, pak objem $\mathcal{N}$ je $2^3V = 8V$, takže uvnitř něj nemůže ležet devět mnohostěnů s objemem V, kde průnik každých dvou má nulový objem.



Nyní nechť bod X leží uvnitř mnohostěnu, který vznikl z $\mathcal{M}$ posunutím A do nějakého vrcholu B. Označme jako Y bod v $\mathcal{M}$, který se v tomto posunutí zobrazil na X. Takže BX je jen posunutá úsečka AY, tedy $AYXB$ je rovnoběžník. V rovnoběžníku se úhlopříčky půlí, takže střed S úsečky AX leží na úsečce BY (dokonce se jedná o její střed). Protože $\mathcal{M}$ je konvexní a B i Y leží v $\mathcal{M}$, leží i střed BY v $\mathcal{M}$. Tedy S leží v $\mathcal{M}$. Ale při popsané stejnolehlosti se S zobrazí na X. Takže X leží v $\mathcal{N}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Řešení se sešlo vcelku málo. Všechna správná postupovala dle vzorové myšlenky, ale dvě třetiny z nich namísto uvažování rovnoběžností a půlení úhlopříček pracovaly s vektory.

(Rado van Švarc)

Cifry

3. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť $S(k)$ značí ciferný součet čísla k. Nalezněte číslo n takové, že[5] $(S(n) + 2017) \mid n$.

(Tonda Le)

ŘEŠENÍ:

Při řešení využijeme faktu, že vynásobením libovolného přirozeného čísla deseti se nezmění jeho ciferný součet. Pokud tedy nalezneme číslo n', pro které je $k = S(n') + 2017$ mocninou deseti, bude k dělit libovolné číslo končící dostatečným počtem nul. Pro dostatečně velké m bude tedy řešením $n = 10^m \cdot n'$. Můžeme například hledat n' s ciferným součtem $S(n') = 10000 - 2017 = 7983$.

Získat takové n' je možné, a to mnoha způsoby – může jím být například číslo složené z 7983 jedniček či 887 devítek. Po připsání čtyř nul tak dostáváme požadované řešení.

POZNÁMKY:

Úloha byla velmi snadná, poslali jste nám dohromady 13 různých správných čísel, přičemž více než polovina z vás nalezla číslo 4066. Ovšem přišlo i pár kuriózních řešení – například čísla 126 976 či 142 102 030.

Pro nalezení 4066 si je bohužel třeba „tipnout“, že rovnice $2\,(S(n) + 2017) = n$ má řešení a poté ho teprve spočítat. Proto jsem se rozhodl ve vzorovém řešení nalézt sice mnohem větší číslo, zato však takové, při jehož hledání není třeba hádat.

(Tomáš Novotný)

Úloha 2.

Existuje přirozené číslo, které má právě deset přirozených dělitelů, přičemž tito dělitelé mají navzájem různé poslední cifry?

(Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že hledané číslo s přesně deseti děliteli končícími na různé cifry existuje. Pak musí mít dělitele, který končí nulou. Tento dělitel je násobkem deseti, tedy i desítka je dělitelem hledaného čísla. Jako násobek deseti musí hledané číslo končit nulou. Vzhledem k tomu, že každé číslo je svým vlastním dělitelem, máme nutně dalšího dělitele končícího nulou (krom desítky). Protože ale dělitel končící nulou má být jen jeden, znamená to, že hledané číslo samotné by muselo být rovno deseti. Číslo deset ovšem deset různých dělitelů nemá (natož s různými ciframi). Žádné číslo odpovídající zadání tedy neexistuje.

[5] O celých číslech a a b řekneme, že a *dělí* b, píšeme $a \mid b$, pokud existuje celé číslo l takové, že $b = al$.

Poznámky:
Přestože úloha byla důkazová, téměř všichni řešitelé si s ní poradili. Ke správnému závěru většinou vedl jeden ze dvou postupů – buď přímo ten vzorový využívající dva dělitele končící nulou, nebo podobný pro poslední cifru pět. Druhý postup využíval rozkladu hledaného čísla na prvočinitele a dělitelů dvojky a pětky, které číslo dělitelné deseti určitě má.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 3.

Nechť $S(k)$ stále ještě značí ciferný součet čísla k. Najděte číslo n, pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.

(David Hruška)

Řešení:
Pokud n je vyhovující číslo, pak rozdíl ciferných součtů čísel n a $n+1$ je násobek sedmi. Zřejmě n musí končit devítkou, neboť jinak by se ciferné součty lišily jen o jedna. Rozdíl ciferných součtů přitom záleží na počtu devítek na konci čísla n. Nechť m je délka největšího souvislého úseku devítek končící na místě jednotek. Po přičtení jedničky se pak ciferný součet zmenší o $9m-1$, protože ze všech těchto devítek se stanou nuly a cifra bezprostředně před zmíněným úsekem se zvýší o jedna. Chceme, aby sedm dělilo $9m-1$, jeden možný kandidát na m je např. čtyřka. Nyní už snadno dohledáme nějaké vyhovující číslo n, třeba 69999 (kde jsme první cifru zvolili tak, aby sedm dělilo $S(n)$).

Poznámky:
Úloha byla jednoduchá, a proto si s ní většina řešitelů hravě poradila. Nejoblíbenější výsledek byl právě 69999 uvedený ve vzorovém řešení. Jeden bod jsem udělil řešením, která uvedla, že hledané číslo musí končit na devítku, ale ke konečnému výsledku už to nedotáhla.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 4.

Dokažte, že pro každé číslo n nesoudělné[6] s deseti existuje číslo složené ze samých jedniček, které je dělitelné n.

(Martin Čech)

Řešení:
Pro $k \in \mathbb{N}_0$ označme a_k číslo tvořené k jedničkami. Číslo a_k lze zapsat pomocí následující sumy: $a_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 10^0 + 10^1 + \dots 10^{k-1}$. Nyní uvažme n-prvkovou posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pokud se v této posloupnosti vyskytuje číslo dělitelné n, tak máme vyhráno.

Pokud ne, předpokládejme pro spor, že žádný z prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$ není dělitelný n. Máme n-prvkovou posloupnost, jejíž prvky nabývají pouze $n-1$ různých zbytků modulo n. Zbytek 0 se v posloupnosti nevyskytuje. Z Dirichletova principu tedy musí existovat $x, y \in \mathbb{N}_0$ taková, že $1 \le x < y \le n$ a že $a_x \equiv a_y \pmod{n}$. To znamená, že $n \mid a_y - a_x$.

$$a_y - a_x = \sum_{i=0}^{y-1} 10^i - \sum_{i=0}^{x-1} 10^i = \sum_{i=x}^{y-1} 10^i = 10^x \sum_{i=0}^{y-x-1} 10^i = 10^x a_{y-x}.$$

Tedy $n \mid 10^x a_{y-x}$. Jelikož n je nesoudělné s deseti, tak už nutně $n \mid a_{y-x}$. To je však spor s předpokladem, že se v posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ nevyskytuje žádný násobek n.

[6] O k, n řekneme, že jsou *nesoudělná*, pokud jejich největší společný dělitel je jedna.

Poznámky:
K úloze se dalo přistupovat vícero způsoby. Nejoblíbenější byl postup jako ve vzorovém řešení. Mnoho řešitelů využilo Eulerovu větu a ukázali, že $n \mid a_{\varphi(9n)}$. Někteří pak hledali periody ve zbytcích mocnin deseti modulo n a v jiných podobných posloupnostech. Ne každému se však povedlo dovést poslední zmíněnou metodu až do zdárného konce.

(Martin Hora)

Úloha 5.

Matěj s Bárou čekali na přednášku a oba se nudili. Matěj napsal na tabuli přirozené číslo. Potom každých pět minut Bára z čísla na tabuli vybrala nenulovou cifru, číslo smazala a místo něj napsala součet tohoto čísla se zvolenou cifrou. Dokažte, že se časem na tabuli muselo objevit sudé číslo.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Zadefinujme si cifročokoládovou posloupnost $p_1, p_2, \ldots$, kde p_i $(i > 1)$ vznikne sečtením p_{i-1} s jednou jeho nenulovou cifrou. Protože jsme p_i dostali z p_{i-1} přičtením jednoho z čísel $1, 2, \ldots, 9$, platí následující nerovnost: $p_{i-1} < p_i < p_{i-1} + 10$.

Předpokládejme nyní, že máme dáno přirozené číslo n. Zjevně $n < 10^k$ pro nějaké dostatečně velké k. Potom pro každou cifročokoládovou posloupnost s $p_1 = n$ musí existovat takové d, že $10^k \leq p_d \leq 10^k + 9$, protože každá cifročokoládová posloupnost je ostře rostoucí a z každých deseti po sobě jdoucích čísel větších než n se musí alespoň do jednoho trefit. Pokud je p_d sudé, tak jsme vyhráli. Pokud bylo číslo p_d liché, potom p_{d+1} musí být sudé, neboť číslo p_d obsahuje pouze jedničky a nuly a poslední cifra je lichá. A tedy p_{d+1} je nutně součtem dvou lichých čísel.

Sudé číslo se tedy opravdu objevit muselo.

Poznámky:
Skoro všechna došlá řešení byla správně. Nejčastěji jste postupovali podobně jako ve vzorovém řešení, jenom jste většinou odtrhli poslední cifru a dívali se na číslo, které rostlo jenom o jedničku.

(Kuba Svoboda)

Úloha 6.

Na sto hřebících jsou popořadě zavěšená „dvojciferná“ čísla $00, 01, 02, \ldots, 10, \ldots, 99$. *Áďa je mezi sebou přeskládala tak, aby se sousední čísla lišila právě v jedné cifře, a to o jedničku (tj. vedle* 19 *může být* 09, 29 *a* 18, *ale například* 10 *ne). Kolik nejvíce čísel mohlo zůstat na svém místě?*

(Matěj Konečný)

Řešení:

V posloupnosti, kterou Áďa dostane po přeskládání, se ciferné součty dvou po sobě jdoucích členů vždy liší o jedna. Proto v této posloupnosti pro všechny členy buď platí, že parita jejich ciferného součtu je vždy stejná jako parita jejich pořadí v přeskládané posloupnosti[7], nebo je naopak parita ciferného součtu každého prvku vždy rozdílná od parity jeho pořadí.

Na začátku platilo, že se parita ciferného součtu padesáti čísel, která začínala sudou číslicí (00 až 09, 20 až 29, … , 80 až 89), vždy shodovala s paritou jejich pořadí, zatímco pro zbylých padesát čísel byla rozdílná. To znamená, že ať už přeskládání Áďiny posloupnosti dopadlo jakkoli, alespoň padesát čísel muselo změnit svůj hřebík prostě proto, že po přeskládání na jejich hřebíku muselo skončit číslo s jinou paritou ciferného součtu.

Nyní zbývá najít možné přeskládání zachovávající pozici nějakých padesáti čísel. Předchozí úvaha nám napovídá, že jsou jen dvě možnosti, jak taková stabilní padesátka může vypadat. Buď se bude jednat o čísla, jež začínají na sudou cifru, nebo o ta začínající na cifru lichou. V prvním

[7] Číslujeme od nuly.

případě (ten druhý by dopadl podobně) už snadno dostáváme řešení tím, že otočíme každou desetici čísel začínajících na lichou cifru:

$$00, \dots, 09, 19, \dots, 10, 20, \dots, 29, \quad \dots \quad, 99, \dots, 90.$$

Poznámky:

Většina došlých řešení se dala rozdělit do dvou škatulek. Zatímco někteří z vás s úlohou neměli problém, mnozí pouze našli optimální řešení zachovávající padesát čísel a následně se obvykle snažili argumentovat pomocí různých heuristických úvah. Mezi takové úvahy patří kupříkladu nápad, že se vyplatí, aby čísla začínající na stejnou cifru, byla v optimálním řešení pohromadě. Jakkoli jsou myšlenky tohoto typu užitečné při hledání správného řešení, jen stěží se z nich dá zhotovit korektní důkaz. Proto byla taková řešení oceněna pouhým bodem za nalezení správného řešení.

(Vašek Rozhoň)

Úloha 7.

Přirozené číslo nazveme k-kruté, pokud každý souvislý úsek jeho ciferného zápisu v soustavě o základu k je prvočíslo (zapsané v téže soustavě). Dokažte, že pro každé $k \geq 2$ existuje jen konečně mnoho k-krutých čísel.

(Jakub Löwit)

Řešení (podle Pavla Hudce):

Vezměme si libovolné prvočíslo p nesoudělné s k a označme jako m počet cifer, které má zápis p v soustavě o základu k. Dokážeme, že všechna k-krutá čísla jsou menší než $N = k^{(p+1)(m+1)-1}$, což znamená, že jich je konečně mnoho.

Pro spor předpokládejme, že pro nějaké k máme k-kruté číslo $\mathcal{K}$ takové, že $\mathcal{K} \geq N$. Všimněme si, že zápis $\mathcal{K}$ v soustavě o základu k neobsahuje žádné nuly (protože nula není prvočíslo). Nerovnost $\mathcal{K} \geq N$ znamená, že $\mathcal{K}$ má v soustavě o základu k alespoň $(p+1)(m+1)$ číslic. Označme jako $s(\mathcal{K}, i)$ číslo dané posledními i číslicemi $\mathcal{K}$ v soustavě o základu k, tj. například pro $\mathcal{K} = (1234)_k$ je $s(\mathcal{K}, 3) = (234)_k$. Podívejme se nyní na úseky $s(\mathcal{K}, (m+1)i)$ pro $i \in \{1, \dots, p+1\}$. To je $p+1$ koncových úseků čísla $\mathcal{K}$. Z Dirichletova principu plyne, že pro nějaká dvě různá čísla $i < j \in \{1, \dots, p+1\}$ platí

$$s(\mathcal{K}, (m+1)i) \equiv s(\mathcal{K}, (m+1)j) \pmod{p}.$$

To ale znamená, že $p \mid s(\mathcal{K}, (m+1)j) - s(\mathcal{K}, (m+1)i)$. A jak vypadá $s(\mathcal{K}, (m+1)j) - s(\mathcal{K}, (m+1)i)$? To je posledních $(m+1)j$ číslic $\mathcal{K}$, přičemž místo posledních $(m+1)i$ z nich jsou nuly. Takže je to hodnota úseku mezi $(m+1)j$-tou cifrou a $((m+1)i+1)$-tou cifrou (pořadí cifer bereme od konce), vynásobená nějakou mocninou k, konkrétně $k^{(m+1)i}$, která v soustavě o základu k „přidá“ nuly na konec). Ale protože p nedělí k, tak nedělí ani $k^{(m+1)i}$, což znamená, že musí dělit hodnotu úseku mezi $(m+1)j$-tou cifrou a $((m+1)i+1)$-tou cifrou. Tento úsek je ale dlouhý alespoň $m+1$ cifer, zatímco p má m cifer; není tedy roven p, a proto jde o složené číslo. To je ve sporu s k-krutostí.

Poznámky:

Většina správných řešení měla podobnou myšlenku, ale místo prvočísla p nesoudělného s k se snažila najít úsek dělitelný $k-1$ (tím pádem soustava o základu 2 musela být ošetřena zvlášť). Řešení se pak lišilo v detailech, ale hlavní myšlenka (podívat se na koncové úseky a z Dirichleta najít dva se stejným zbytkem modulo něco) byla pokaždé stejná.

(Matěj Konečný)

Úloha 8.

Pepa se Štěpánem vymysleli čistě matematické kouzlo. Pepa požádá diváka, aby husím brkem napsal na kus pergamenu jakýkoliv řetězec N arabských číslic. Potom Pepa zakryje některou dvojici sousedních cifer dalším kusem pergamenu. Teprve nyní přichází na scénu Štěpán, podívá se na neschované číslice a oznámí, které dvě cifry Pepa zakryl (včetně jejich pořadí). Pro jaké nejmenší N je takový trik možné provést?

(Jakub Löwit)

Řešení:
Označme A množinu všech N-ciferných řetězců a B množinu všech řetězců, které vznikly z N-ciferného řetězce zakrytím dvou po sobě jdoucích číslic. Pro každé číslo z A musí mít Pepa číslo z B, které z něj vytvoří zakrytím dvou sousedních cifer, přičemž na žádné číslo z B nesmí připadat více než jedno číslo z A. Proto musí platit $|A| \leq |B|$. Protože $|A| = 10^N$ a $|B| = (N-1)10^{N-2}$ (dvojice zakrytých cifer má $N-1$ možných pozic), tak $N \geq 101$.

Nyní ukážeme, že 101 číslic stačí. Označme s součet cifer na sudých pozicích a ℓ součet cifer na lichých pozicích. Pepa spočítá s a ℓ a zakryje políčko na pozici $(s \mod 10) \cdot 10 + (\ell \mod 10)$ a políčko bezprostředně za ním (políčka budeme číslovat od nuly). Štěpán tedy z pozice zakrytých políček zjistí hodnoty $s \mod 10$ a $\ell \mod 10$ v původním řetězci. Protože s a ℓ mohou být nejvýše o 9 větší než jsou součty cifer na sudých a lichých pozicích ve zbylém $N-2$ ciferném řetězci, který Štěpán vidí, dokáže Štěpán určit hodnotu zakrytého políčka na sudé a na liché pozici.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správně a více či méně využívala myšlenku rozdělení cifer na liché a sudé. Jediná problematická část řešení bylo zdůvodnění dolního odhadu na počet cifer, kde nestačí zdůvodnit dolní mez pro jeden konkrétní algoritmus, který je pak použit v druhé části, ale je potřeba dolní mez ukázat bez závislosti na strategii Pepy a Štěpána. *(Martin Töpfer)*

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Anička o prázdninách navštívila muzeum, ve kterém byla vystavena starodávná tabulka o n řádcích a 2017 sloupcích vyplněná reálnými čísly. Součty čísel ve všech jejích sloupcích byly navzájem různé. Anička tabulku omylem shodila a všechna políčka z ní vypadala. Teď by ráda čísla vrátila zpátky tak, aby součty nejen ve všech sloupcích, ale i ve všech řádcích byly navzájem různé.[8] *Podaří se jí to pro jakákoliv čísla v tabulce, pokud*

(a) $n = 2$,

(b) $n = 2017$? *(Rado van Švarc)*

ŘEŠENÍ:

(a) Ano, pro $n = 2$ se jí to podaří.

Začne tím, že políčka umístí do tabulky tak, jak v ní byly předtím. V tu chvíli mají sloupce určitě různé součty. Pokud mají i řádky různé součty, jsme hotovi. Předpokládejme, že mají tedy oba řádky stejné součty.

Pokud jsou v nějakém sloupci dvě různá čísla, můžeme je prohodit, čímž se nám zachovají součty sloupců, ale součet jednoho řádku vzroste a druhého klesne. Tím dostaneme různé součty řádků a máme hotovo.

Zbývá nám případ, kdy jsou v každém sloupci dvě stejná čísla. Protože sloupce mají různé součty, bude v každém sloupci jiná dvojice čísel. Označme si tři nejmenší čísla v tabulce jako $x < y < z$. Ve třech sloupcích, které odpovídají těmto číslům, čísla proházíme následujícím způsobem: Z políček vytvořme uspořádané dvojice (x, y), (x, z) a (y, z), a ty umístěme do sloupců tak, aby první člen dvojice byl vždy v prvním řádku. Tím se součet prvního, resp. druhého řádku sníží, resp. zvýší o $z - x$, takže řádky už budou mít různé součty. Navíc tyto pozměněné tři sloupce budou mít různé součty $x + y < x + z < y + z$, které jsou navíc všechny menší než $2z$, a tudíž i menší než všechny další součty sloupců v tabulce. Takže máme hotovo.

(b) Ne, pro $n = 2017$ se jí to nepodaří.

Předpokládejme, že je tabulka na začátku vyplněná tak, aby v prvním sloupci byly samé nuly a pro $i > 1$ bylo v i-tém sloupci i jedniček a $2017 - i$ nul.

Pro spor předpokládejme, že lze políčka přeskupit požadovaným způsobem. Všimněme si, že součty ve sloupcích nabývají jen celočíselných hodnot mezi 0 a 2017. Proto pokud je v každém sloupci jiný součet, musí být mezi součty sloupců vynecháno právě jedno celé číslo mezi 0 a 2017. Protože navíc víme, že součet součtů sloupců je roven $0 + 2 + 3 + \cdots + 2017$, musí být vynechána jednička. To speciálně znamená, že existuje sloupec se samými nulami (ten se součtem nula) a sloupec se samými jedničkami (ten se součtem 2017). Ovšem analogickou úvahou získáme to samé pozorování o řádcích. Ale sloupec se samými jedničkami a řádek se samými nulami nemohou existovat zároveň, což je hledaný spor. Anička tedy nemůže docílit stavu, kdy by ve všech řádcích i ve všech sloupcích byly různé součty.

[8] Součet čísel v nějakém řádku se ale může rovnat součtu čísel v některém sloupci.

Poznámky:
První část úlohy nebyla těžká, ale mnoho řešitelů udělalo chybu, když si čísla x, y, z zvolili libovolně. Potom totiž nebylo možné zaručit, že součet jednoho z nově vzniklých součtů sloupce není roven součtu jiného sloupce v tabulce. Za tuto chybu jsem strhával bod. *(Rado van Švarc)*

Úloha 2.

(a) *Tonda narazil na n po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součtem je prvočíslo. Určete všechny možné hodnoty n.* *(Jan Krejčí)*

(b) *Orgové PraSátka na schůzce debatovali o tom, kam se půjde na PraSečí výlet. Zaznělo několik nápadů a každý z nich podporovalo právě k organizátorů z celkově $2k$ přítomných. Ukázalo se, že pro libovolnou $(k-1)$-člennou skupinu organizátorů existuje právě jeden návrh, který podporuje celá skupina. Dokažte, že potom $(k+1)$ je prvočíslo.* *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
(a) Ukážeme, že jediné hodnoty, kterých n může nabývat, jsou jedna a dvě. Prvočíslo 43 lze triviálně napsat jako součet jednočlenné posloupnosti čísel, navíc jej lze napsat jako součet dvoučlenné posloupnosti $21 + 22$, pro n rovno jedné či dvěma tedy taková posloupnost opravdu existuje.

Pro $n > 2$ uvažme nějakou posloupnost n po sobě jdoucích čísel a nejmenší z nich označme k. Potom si součet uvažovaných čísel upravíme[9] na

$$k + (k+1) + \cdots + (k+n-1) = \frac{n}{2} \cdot (k + (k+n-1)) = n \cdot \left(k + \frac{n-1}{2}\right).$$

Pro sudá n je číslo $\frac{n}{2}$ přirozené a větší než jedna, stejně tak $2k + n - 1$ je větší než jedna, protože k i n jsou alespoň jedna. Pro n liché je $n > 1$ z předpokladu a $k + \frac{n-1}{2}$ je přirozené číslo větší než jedna. V obou případech jsme schopni součet napsat jako součin dvou přirozených čísel, která jsou větší než jedna, takže se nemůže jednat o prvočíslo.

(b) (podle Viktora Fukaly) Po celou dobu předpokládáme, že k je přirozené. Zjevně platí $k + 1 > 1$. Pokud tedy dokážeme, že $k + 1$ není dělitelné žádným menším prvočíslem, budeme hotovi. O k-členné skupině orgů, která hlasovala pro jeden nápad, mluvme jako o *klice*.

Mějme $0 \le r \le k-2$ a libovolnou skupinu r organizátorů. Pro každý návrh, který podporují všichni z nich, je možné tuto r-člennou skupinu doplnit $k - r$ způsoby na $(k-1)$-člennou skupinu, která bude hlasovat pro tento návrh (z odpovídající kliky můžeme vybrat $k - r$ způsoby člověka, kterého do výsledné $(k-1)$-členné skupiny nezařadíme). To znamená, že počet všech $(k-1)$-členných skupin obsahujících námi vybranou skupinu r organizátorů musí být dělitelný číslem $k - r$, neboť ze zadání víme, že každá $(k-1)$-členná skupina musí být součástí právě jedné kliky. Protože $(k-1)$-členných skupin obsahujících našich r organizátorů je $\binom{2k-r}{k-1-r}$, dostáváme

$$k - r \mid \binom{2k-r}{k-1-r}.$$

Pro libovolné prvočíslo $1 < p < k+1$ lze nyní zvolit $0 \le r \le k-2$ takovým způsobem, aby $k - r = p$. Potom

$$\binom{2k-r}{k-1-r} = \frac{(2k-r)!}{(k-r-1)!(k+1)!} = \frac{(k+2)(k+3)\ldots(2k-r-1)(2k-r)}{(k-1-r)!}.$$

Protože $p = k - r$ je prvočíslo a dělí poslední zlomek, musí dělit jednu ze závorek v čitateli, řekněme A. Pokud by navíc $k - r$ dělilo $k + 1$, muselo by $k - r$ dělit i $A - (k+1)$. Ovšem rozdíl $A - (k+1)$ je větší než nula a menší než $k - r$, což nelze. Tedy dohromady dostáváme, že $k + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem menším než $k + 1$, takže je to prvočíslo, čímž jsme hotovi.

---

[9] Jedná se o součet aritmetické posloupnosti pro $a_1 = k$, $a_n = k + n - 1$ a diferenci $d = 1$.

Poznámky:
Častou chybou bylo, že v řešení byl uvedený součet jako ve vzorovém řešení části **(a)**, aniž by bylo definováno, co sčítáme (záhadně se tam objevila neznámá, která nikde předtím nebyla definovaná). Kromě tohoto formálního nedostatku byla většina řešení části **(a)** správně. Odevzdaných částí **(b)** bylo o poznání méně. V této části si za hezké a krátké řešení zasloužil $+i$ Viktor Fukala, podle kterého je sepsaný i vzorák. *(Honza Krejčí)*

Úloha 3.

(a) *Na bleším trhu si Honza koupil hodinový ciferník s obvykle umístěnými čísly od jedné do dvanácti. Zvláštní je ale tím, že se s čísly dá hrát. Honza každé ráno buď vyměnil dvě protilehlá čísla, nebo dvě sousední o jedna zvýšil. Kdyby žil dost dlouho, mohl by po konečně mnoha dnech mít na ciferníku dvanáct stejných čísel?* *(Honza Krejčí)*

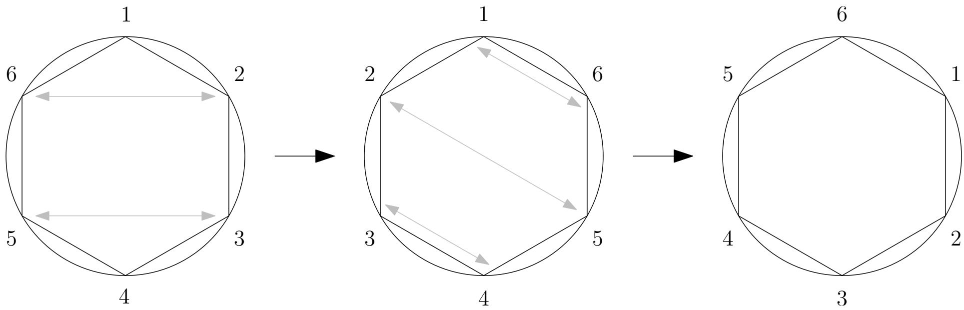
(b) *Na ostrově je n nor a v každé z nich žije jeden ptakopysk. Je známo, že každému ptakopyskovi se líbí jedna nora, a ta se nelíbí žádnému jinému. Po velkém ptakopyscím zasedání bylo rozhodnuto, že se všichni ptakopysci přestěhují do nor, které se jim líbí. Probíhá to následovně: Během jednoho dne si může každý ptakopysk vyměnit noru s jediným dalším. Určete nejmenší počet dní, který jim ke stěhování stačí, ať už je situace sebezapeklitější.* *(Kuba Löwit)*

Řešení:
(a) Obarvěme si modře čísla na ciferníku, která byla na začátku sudá, a zbylá obarvěme červeně. Na začátku byl součet modře obarvených čísel $2 + 4 + \cdots + 12 = 42$, zatímco součet červeně obarvených čísel byl $1+3+\cdots+11 = 36$, tedy o 6 méně. Nyní si stačí všimnout, že se tento rozdíl po žádné z Honzových operací nezměnil. Vskutku, pokaždé, když Honza prohodil dvě protilehlá čísla, byla buď obě dvě červená, nebo obě dvě modrá, a barva čísla umístěného na dané pozici se tak nezměnila. Jestliže přičetl jedničku ke dvěma vedlejším číslům, jedno z nich bylo modré a druhé červené, rozdíl odpovídajících součtů tedy zůstal stejný. Na Honzově ciferníku se proto nikdy neobjevilo dvanáct stejných čísel – pokud by se tak stalo, pak by rozdíl součtu modrých a červených čísel musel být 0.

(b) Není těžké ověřit, že pokud $n = 1$, nejsou potřeba žádné operace, a pokud $n = 2$, potřebné prohození dvou ptakopysků se dá zvládnout za jeden den. Dále předpokládejme, že $n > 2$. Všimněme si, že situace, kdy ptakopysk p_1 touží po noře ptakopyska p_2, p_2 se chce přestěhovat k p_3 a p_3 by rád bydlel u p_1, se již nedá zvládnout za jeden den. Ukážeme, že sebezapeklitější situace se dá (nezávisle na n) vyřešit za dva dny.

Ze zadání víme, že každý ptakopysk bydlí v jedné noře a v každé noře chce bydlet jeden ptakopysk. Zafixujme nyní nějakého ptakopyska p_1 a uvažme posloupnost ptakopysků $p_1, p_2, \ldots$ takovou, že p_1 chce bydlet u p_2, p_2 u p_3 atd. V takové nekonečné posloupnosti se nutně nějaký ptakopysk musí opakovat. Nechť p_k je první ptakopysk v posloupnosti takový, že p_{k+1} se už někdy v naší posloupnosti vyskytl. Všimněme si, že ptakopysk p_{k+1} musí být doopravdy ptakopyskem p_1, neboť u všech ostatních ptakopysků již víme, kdo u nich chce bydlet (jejich předchůdce v posloupnosti). Dostali jsme tedy cyklus ptakopysků $p_1, p_2, \ldots p_k$ takový, že každý ptakopysk v něm chce bydlet u svého následníka v cyklu. Snadno si dorozmyslíme, že opakováním stejného procesu nakonec všechny ptakopysky rozdělíme do několika takových cyklů.

Nyní ukážeme, jak se během dvou dní vypořádat s jedním cyklem ptakopysků $p_1, \ldots, p_k$ nezávisle na těch ostatních. Uděláme to následovně. Během prvního dne vždy vyměníme ptakopyska p_i s ptakopyskem p_{k-i+2} pro všechna i taková, že $2 \le i \le \lfloor (k+1)/2 \rfloor$. V průběhu druhého dne pak vždy vyměníme ptakopyska p_i s ptakopyskem p_{k-i+1} pro $1 \le i \le \lfloor k/2 \rfloor$. Proč takové řešení funguje, už lze jednoduše dopočítat, my místo toho ukážeme, jak lze jeho správnost nahlédnout pomocí obrázku. Řešení má totiž názornou geometrickou interpretaci: jestliže si cyklus ptakopysků představíme jako pravidelný mnohoúhelník s vrcholy očíslovanými čísly $1, \ldots, k$, stěhování pak odpovídá rotaci mnohoúhelníku o úhel $360^\circ/k$. Takovou rotaci umíme získat složením dvou vhodných osových souměrností (podle os, které svírají úhel $360°/2k$ a prochází středem mnohoúhelníku), a to jsou právě ony výměny ze začátku odstavce.



POZNÁMKY:
Ačkoliv s ciferníkem si většina z Vás hravě poradila, ptakopysci leckteré PraSátko převezli. Mnozí řešitelé si totiž špatně přečetli zadání a mysleli si, že za jeden den je možno prohodit pouze jednu dvojici ptakopysků. Rozmyslete si, že potom by správnou odpovědí bylo $n - 1$. Další populární odpovědí bylo $\log_2(n)$, neboť takový počet dní potřebuje „hladový" algoritmus, který každý den ubytuje polovinu ptakopysků (to je vskutku nejvíc, co za jeden den můžeme udělat). Taková řešení si vysloužila jeden bod. *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 4.

(a) Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y splňující

$$f(x + y) < f(xy).$$

(Rado van Švarc)

(b) Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ splňující pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ vztah

$$f(f(x)) = -x.$$

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:
(a) Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje nekonstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá dvě reálná čísla x a y vztah $f(x+y) \geq f(xy)$. Z dosazení $y = 0$ vidíme, že platí $f(x) \geq f(0)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále dosaďme $y = -x$ a dostáváme

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

opět pro každé reálné x. Protože funkce $g(x) = -x^2$ nabývá všech nekladných hodnot, plyne z obou dosud odvozených nerovností pro každé $z < 0$ vztah $f(0) \leq f(z) \leq f(0)$, tedy f musí být konstantní na nekladných číslech. Konečně dosazením $x = y = -\sqrt{a}$, kde a je libovolné kladné číslo, dostáváme

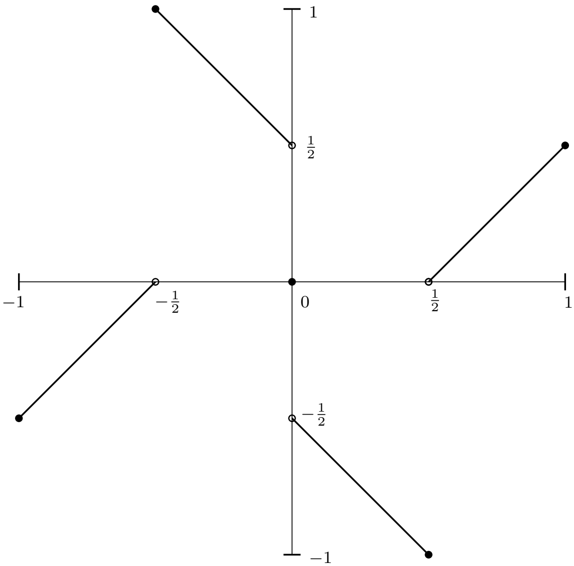
$$f(a) \leq f(-2\sqrt{a}).$$

My už ale víme, že $f(-2\sqrt{a}) = f(0)$ a $f(0) \leq f(a)$, čili f je konstantní na celém definičním oboru, což je spor.

(b) Zadání splňuje například funkce definovaná následujícím způsobem:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in \langle -1, \frac{1}{2}), \\ -x + \frac{1}{2}, & x \in \langle -\frac{1}{2}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ -x - \frac{1}{2}, & x \in (0, \frac{1}{2}\rangle, \\ x - \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle. \end{cases}$$

Ukažme si to třeba pro $x \in \langle -1, -\frac{1}{2})$. Pro taková x platí $f(x) = x + \frac{1}{2}$, což je číslo v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 0)$, tedy $f(f(x)) = -(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = -x$, což jsme chtěli. Na dalších intervalech se tato identita ověří zcela analogicky.



Poznámky:
V první části úlohy bylo nejčastější chybou tvrzení, že pro každá dvě čísla a, b (pro která $f(a) < f(b)$) lze najít čísla x a y, aby $x + y = a$ a $xy = b$, což není pravda (vezměme například $a = 1$ a $b = 100$), dokonce je to ekvivalentní tomu, že každá kvadratická rovnice má reálné řešení. Dále se vyskytl názor, že reálná funkce musí být alespoň na nějakém intervalu monotónní (tedy neklesající nebo nerostoucí), což ovšem také není pravda a příkladem je například funkce dávající hodnotu 1 v racionálních a hodnotu 0 v iracionálních číslech.

I s druhou částí se velká většina z došlých řešení vypořádala úspěšně. Skoro všechna obsahovala předpis nějaké podobné (po částech lineární) funkce. Objevil se ale i jiný přístup: nule přiřadit nulu, spárovat čísla v intervalu $(0, 1\rangle$ a pak f definovat pro spárovaná kladná čísla p a q takto: $f(p) = q$, $f(q) = -p$, $f(-p) = -q$ a $f(-q) = p$, čímž zaručíme platnost zadaného vztahu. Pokud si chce čtenář zavzpomínat na loňský seriál o teorii množin, doporučuji mu si rozmyslet, že tento přístup dává opravdu hodně řešení, přesněji řečeno $2^{|\mathbb{R}|}$, což je stejně jako vůbec všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Na druhou stranu řešení nemohou být moc hezká, konkrétně se jejich grafy nemohou dát „nakreslit jedním tahem“, přesněji žádné řešení úlohy nemůže být spojitá funkce. Několik opravdu pěkně a správně sepsaných řešení si vysloužilo imaginární bod. *(David Hruška)*

Úloha 5.

(a) *Na skalní římse leží tři hromádky o* 51, 49 a 5 *kamenech. V každém kroku můžeme buď sloučit dvě hromádky, nebo rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejně velké. Můžeme takto vytvořit* 105 *hromádek po jednom kameni?*

(b) *Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři.*

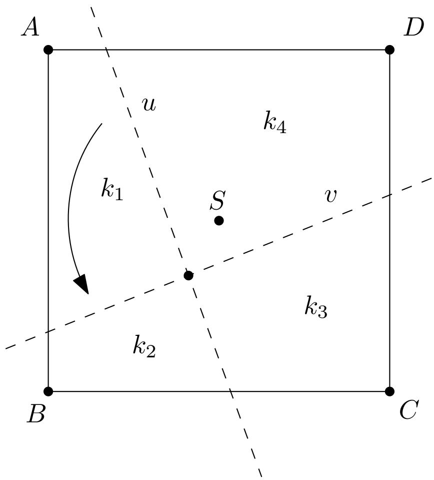
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

(a) Kdyby se stalo, že v některém kroku dostaneme hromádky, jejichž počty mají lichého společného dělitele a, pak už nikdy nemůžeme vytvořit hromádku s jedním kamenem, protože hromádky vzniklé půlením nebo sloučením budou pořád mít počet dělitelný a.

Na začátku mají všechny tři hromádky lichý počet kamenů, a proto v prvním kroku musíme dvě hromádky sloučit. Získáme tak buď dvě hromádky s 51 a 54 kameny, jejichž velikosti mají společného dělitele 3, nebo dvě hromádky o velikostech 49 a 56, které mají společného dělitele 7, nebo dvě hromádky velké 5 a 100, které mají společného dělitele 5. Nemůžeme tedy vytvořit 105 hromádek po jednom kameni (dokonce neumíme ani vytvořit žádnou hromádku s jedním kamenem).

(b) Vrcholy čtverce označíme A, B, C, D a střed S. Dvě přímky označíme u, v a čtyři ohraničené oblasti v pořadí k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_1, k_2 leží na jedné straně vůči u a k_2, k_3 leží na jedné straně vůči v. BÚNO k_1, k_2, k_3 mají stejný obsah. Uvažujme otočení o $90°$ se středem v S ve směru k_1 ku k_2 a k_2 ku k_3. Nechť u' je obraz přímky u, pak platí, že $u' \parallel v$ a tyto přímky rozdělují čtverec ve stejném poměru, neboť $k_1 + k_2 = k_2 + k_3$. Díky zvolenému směru otočení dostáváme $u' \equiv v$.



Nechť a, b jsou oblasti vzniklé sloučením k_1 a k_2, resp. k_2 a k_3. Podle předchozí části víme, že oblast a se otočením zobrazí na b. Přímka v půlí oblast a, a proto se otočením zobrazí na přímku v', která půlí oblast b. Navíc platí, že $v' \parallel u$ a u také půlí b, tudíž $v' \equiv u$. Tedy otočíme-li přímku u o $180°$ kolem S, dostaneme zase u, a proto u obsahuje S. Oblast a má obsah rovný polovině obsahu čtverce a každá z částí k_1, k_2, k_3 má obsah čtvrtiny čtverce, z čehož plyne, že i čtvrtá část musí mít obsah čtvrtiny čtverce.

Poznámky:

Mnoho řešitelů se v části **(a)** domnívalo, že počet hromádek s jedním kamenem je vždy sudý, neboť vzniknou po dvou půlením hromádek se dvěma kameny, a proto celkový počet kamenů musí být lichý. Tento argument bohužel neplatí, neboť jednokamenné hromádky můžeme použít ke sloučení a jako protipříklad slouží startovní pozice se dvěma hromádkami 2 a 3, které dávají dohromady 5 kamenů, přitom se snadno dobereme k 5 jednokamenným hromádkám.

Část **(b)** se ukázala být zapeklitější, než jsem si myslel. Nebylo těžké nahlédnout, že aby měly všechny oblasti stejný obsah, musí přímky procházet středem čtverce, což navádí k postupu, který rozebíral změny obsahů jednotlivých částí při posunutí průsečíku přímek ke středu, což se rigorózně podařilo jen pár jedincům. Častou chybou bylo předpokládat podobnost čtyřúhelníků, které mají stejné vnitřní úhly, což obecně neplatí. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 6.

(a) *Kuba našel pravidelný čtyřstěn s hranou délky jedna. Nelenil a hned na jeho povrch nakreslil devět bodů. Dokažte, že mezi nakreslenými body vždy najdeme nějaké dva, jejichž vzdálenost v prostoru je nejvýše $\frac{1}{2}$.* *(Honza Krejčí)*

(b) *Čtyřboký jehlan $SABCD$ má podstavu tvořenou lichoběžníkem $ABCD$ s rovnoběžnými stranami AD a BC, přičemž $|AD| > |BC|$. Středy úseček AB a SD označme po řadě M a N, průsečík roviny ABN s přímkou SC nazvěme E. Dokažte, že přímky BE a MN jsou rovnoběžné.* *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:

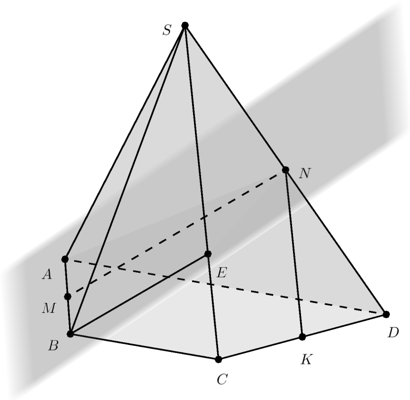
(a) Na každé stěně pravidelného čtyřstěnu nakreslíme střední příčky, které stěny rozdělí na pravidelné trojúhelníky o straně délky $\frac{1}{2}$. Celkový povrch pak rozdělíme na osm částí: čtyři části jsou jednotlivé trojúhelníky ze středních příček na každé stěně a každá ze zbývajících čtyř částí se skládá ze tří trojúhelníků sdílejících společný vrchol čtyřstěnu. Jelikož Kuba nakreslil devět bodů, nutně musí být nějaké dva body X, Y ve stejné části, říkejme jí $\triangle$. Ukážeme, že vzdálenost těchto dvou bodů je nejvýše $\frac{1}{2}$.

Předpokládejme nejprve, že $\triangle$ je trojúhelník. Bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je nějaký vrchol $\triangle$, označme ho A. (Rozmysli si, že A je opravdu vrchol – pokud by A ležel uvnitř $\triangle$, můžeme ho „prodloužením“ úsečky AX dostat na stranu, dále pokud by A byl na straně a ne ve vrcholu, pak se posunutím A směrem k jednomu z vrcholů vzdálenost zvětší.) Dále bod v $\triangle$ s největší vzdáleností od A je (využitím stejné úvahy) jeden ze dvou zbylých vrcholů, označme ho B. Platí tedy $|XY| \le |XA| \le |AB| = \frac{1}{2}$, neboť AB je strana $\triangle$ a má délku $\frac{1}{2}$.

Dále si všimněme, že pokud $\triangle$ je čtyřstěn bez jedné stěny, platí to stejně: Bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je vrchol A naproti stěně, na které leží X.[10] (Protože pokud A není zmíněný vrchol, tak koule o středu A a poloměru $|XA|$ neobsahuje celý $\triangle$, a proto můžeme A posunout do větší vzdálenosti.) Tedy bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je A, bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od A je jiný vrchol B, a tedy $|XY| \le |XA| \le |AB| = \frac{1}{2}$.

(b) Označme K střed úsečky CD. Potom KN je střední příčka v trojúhelníku CDS, je tedy rovnoběžná s CS. Dále jsou z definice rovnoběžné přímky MK a BC. Z těchto svou rovnoběžností máme rovnoběžnost rovin MKN a BCE. Přímky BE a MN tedy leží v rovnoběžných rovinách BCE a MKN, navíc obě leží ve společné rovině ABN. Jsou tedy rovnoběžné.

[10] Pokud X leží na hraně čtyřstěnu, znamená to, že leží na obou sousedních stěnách.



Poznámky:
V řešeních části **(a)** se často objevoval známý nešvar v podobě používání obratů jako: „Nejvýhodnější bude, pokud Kuba rozmístí čtyři body do vrcholů čtyřstěnu…“ Řešení se pak totiž omezí na jedno konkrétní rozmístění, ačkoliv úlohou bylo ukázat, že to platí pro každé rozmístění.

V části **(b)** se sešlo o dost méně řešení, za ni si vysloužil imaginární bod *Martin Raška*, který přišel s nápadem zobrazit si vše v kolmé projekci na rovinu kolmou k AD a obrázek si tím poněkud zjednodušil. *(Tonda Češík)*

Úloha 7.

(a) *Existuje přirozené číslo a takové, že součet počtů cifer a a a^3 je roven 2017?*

(Honza Krejčí)

(b) *Nechť $S(k)$ značí ciferný součet přirozeného čísla k. Pro které nejmenší přirozené n platí*

$$S(n) = S(2n) = \cdots = S(2017n)?$$

(Rado van Švarc)

Řešení:
(a) Podíváme se, jak se změní počet cifer čísla a, když ho umocníme na třetí. Pokud a má n cifer, potom platí $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Umocněním této nerovnosti na třetí dostaneme $10^{3n-3} \leq a^3 < 10^{3n}$, tedy a^3 má $3n-2$, $3n-1$ nebo $3n$ cifer. Součet počtů cifer a a a^3 bude tedy buď $4n-2$, nebo $4n-1$, nebo $4n$ pro nějaké přirozené n. Bude tedy po vydělení čtyřmi dávat zbytek 0, 2 nebo 3. Protože ale 2017 dává při dělení čtyřmi zbytek jedna, tak žádné takové číslo a nemůže existovat.

(b) Nejprve ukážeme, že číslo 9999 vyhovuje zadání, tedy že pro každé k od 1 do 2017 platí $S(9999k) = 36$. Číslo 9999 lze přepsat jako $10000-1$, na násobení čísla k číslem 9999 se tedy můžeme dívat jako na odčítání k od jeho desetitisícinásobku. Nechť k není dělitelné deseti (pokud je, můžeme ho deseti vydělit a ciferný součet se nezmění). Zapíšeme si jeho cifry jako $\overline{abcd}$, kde a i další cifry zleva můžou být nuly, pouze d je určitě nenulové. Můžeme si všimnout, že

$$\overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}.$$

Tato rovnost platí proto, že d je nenulové, tedy v řádu jednotek dojde při odčítání k přenosu jedničky. Obdobně v řádech desítek, stovek i tisíců odečítáme vždy alespoň jedničku, která se přenesla z minulého řádu, tedy i tady dojde k přenosu. V řádu desetitisíců naopak odečítáme právě jedničku přenesenou z řádu tisíců od d, které je alespoň jedna, tedy k dalšímu přenosu nedojde.

Ciferný součet $S(\overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)})$ bude $a+b+c+d-1+9-a+9-b+9-c+10-d=36$.

Nyní již stačí ukázat, že 9999 je opravdu nejnižší možné.

Vezměme si tedy nějaké přirozené $n \leq 9999$, které splňuje zadání. Chceme ukázat, že $n = 9999$. Protože ciferný součet dává stejný zbytek modulo devět jako číslo samo a $S(9n)$ je dělitelné devíti, musí být i $S(n)$, a tedy i n dělitelné devíti. Nechť tedy $m = \frac{n}{9}$. Protože n je maximálně 9999, m je maximálně 1111. Dále víme, že $S(n) = S(1111n) = S(1111 \cdot 9m) = S(9999m)$, ale protože $1 \leq m \leq 1111 < 2017$, tak již podle tvrzení dokázaného v první části důkazu platí $S(9999m) = 36$. Tedy $S(n) = 36$. Číslo 9999 je ale evidentně nejnižší číslo s ciferným součtem 36.

Poznámky:

Úloha byla poměrně přístupná, a tak se drtivá většina řešitelů pokusila i o část **(b)**. Část **(a)** většině nečinila větší potíže, pouze několik řešitelů se dopustilo chyby o jedničku. Ta je bohužel typicky stála oba body, protože v jejich řešení nebyla žádná z myšlenek potřebných ke korektnímu vyřešení úlohy.

To samé bohužel nelze říct o části **(b)**, kde kromě zhruba deseti správných řešení přišlo také téměř dvakrát tolik řešení, která sice nalezla správnou hodnotu $n = 9999$, ale buď její správnost nedokazovala vůbec, nebo používala vágní, zamlžené formulace o tom, že „je nejlepší, když číslo obsahuje hodně devítek“ a podobně. Taková řešení dostala někdy jeden (například pokud korektně dokázala alespoň $9 \mid n$), typicky však žádný bod.

Úspěšná řešení části **(b)** nejčastěji postupovala opačně než vzorák, tedy začala důkazem, že žádné menší n fungovat nemůže. V takovém případě většinou rozebírala člen $S(1001n)$, nicméně tento postup byl, ač většinou úspěšný, o něco delší a méně elegantní než vzorák. *(Viki Němeček)*

Geometrie trojúhelníka 3

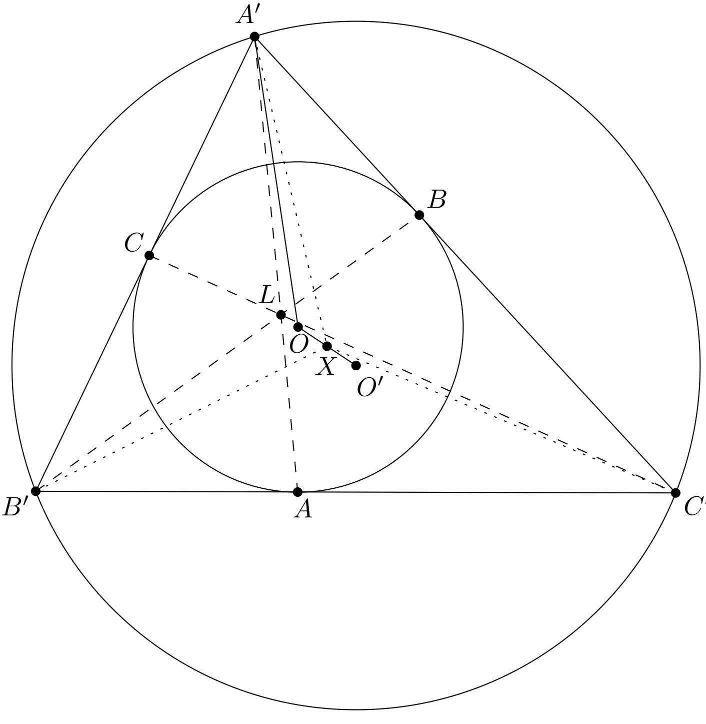
3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Je dán ostroúhlý nerovnostranný trojúhelník ABC. Tečny k jeho kružnici opsané vedené vrcholy B a C se protínají v bodě, který označíme A' a podobně definujeme body B' a C'. Označme O opsiště trojúhelníku ABC, L jeho Lemoinův bod a O' opsiště trojúhelníku $A'B'C'$. Obraz přímky LA' podle osy úhlu $B'A'C'$ označme l_A a podobně definujeme přímky l_B a l_C. Dokažte, že přímky l_A, l_B, l_C a OO' procházejí jedním bodem.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:



Je známé, že přímka AA' je symediánou trojúhelníku ABC, tudíž L je průsečík přímek AA', BB', CC'. Nyní se podíváme na všechno z pohledu trojúhelníka $A'B'C'$. Kružnice opsaná ABC je vlastně kružnice vepsaná $A'B'C'$, a proto L je Gergonův bod v $A'B'C'$. Nechť X je kamarádem bodu L. Pak X podle definice leží na l_A, l_B, i l_C. Podle tvrzení na osmé straně třetího dílu seriálu je X

středem záporné stejnolehlosti převádějící kružnici vepsanou $A'B'C'$ na kružnici opsanou $A'B'C'$; leží tudíž i na spojnici jejich středů O a O'.

Poznámky:
S klíčovou znalostí o kamarádu Gergonova bodu se úloha stala jednoduchou. Drtivá většina došlých řešení postupovala stejně jako to vzorové a téměř všichni dostali plný počet bodů.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 2.

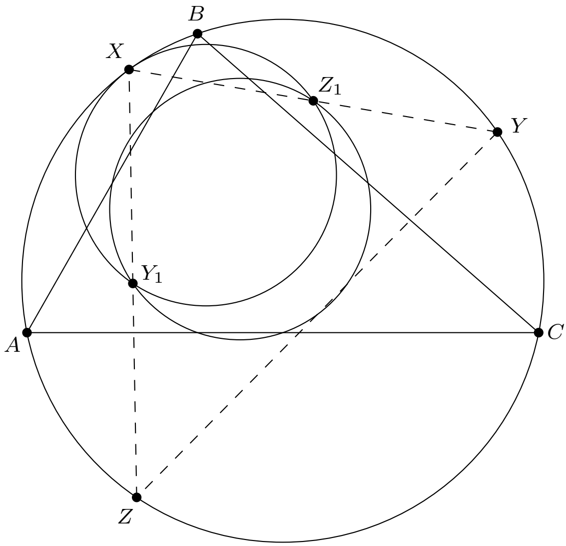
Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Γ a Feuerbachovou kružnicí γ. Buď X bod na Γ. Nechť Y a Z jsou dva různé body na Γ takové, že středy úseček XY a XZ leží na γ. Navíc platí, že trojúhelník XYZ je ostroúhlý. Ukažte, že střed YZ leží na γ.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme jako γ' Feuerbachovu kružnici trojúhelníku XYZ. Ukážeme, že $\gamma = \gamma'$. Potom zjevně střed YZ bude ležet na γ.

Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, leží jeho kolmiště uvnitř trojúhelníka. Takže γ jako obraz Γ ve stejnolehlosti se středem v tomto kolmišti a koeficientem stejnolehlosti $\frac{1}{2}$ leží celá uvnitř Γ a speciálně ji neprotíná. Analogicky si uvědomíme, že γ' a Γ se neprotínají.

Označme R poloměr kružnice Γ, pak γ i γ' mají poloměr $\frac{R}{2}$. Označme si střed XZ a XY jako Y_1 a Z_1. Kružnice procházející skrze Y_1 a Z_1 s poloměrem $\frac{R}{2}$ jsou dvě. Jedna z nich je kružnice opsaná trojúhelníku XY_1Z_1, která má správný poloměr, protože je to obraz Γ ve stejnolehlosti se středem v X a koeficientem $\frac{1}{2}$. Tato kružnice ovšem protíná Γ, takže se nemůže shodovat ani s jednou z γ a γ'. Tedy obě dvě musejí být rovny té druhé kružnici procházející Y_1, Z_1 s poloměrem $\frac{R}{2}$ a tedy i sobě navzájem.



Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná, občas ovšem řešitelé zapomněli říci, že se jedná o „tu správnou“ z oněch dvou možných kružnic. Za to jsem strhával jeden bod.

Na otázku „Jak toto souvisí s třetím dílem seriálu?“ se dá odpovědět „Ponceletovo porisma“. Úloha se zdála být podobná Ponceletovu porismatu (máme dvě kružnice, které jsou někdy opsaná a Feuerbachova a chceme ukázat, že pak už jsou „vždycky“ opsaná a Feuerbachova). Pro ty z vás, kteří znají inverzi byla úloha dokonce i přímo řešitelná Ponceletovým porismatem: po inverzi úlohy dle Γ bychom dostali přesně Ponceletovo porisma.

(Rado van Švarc)

Úloha 3.

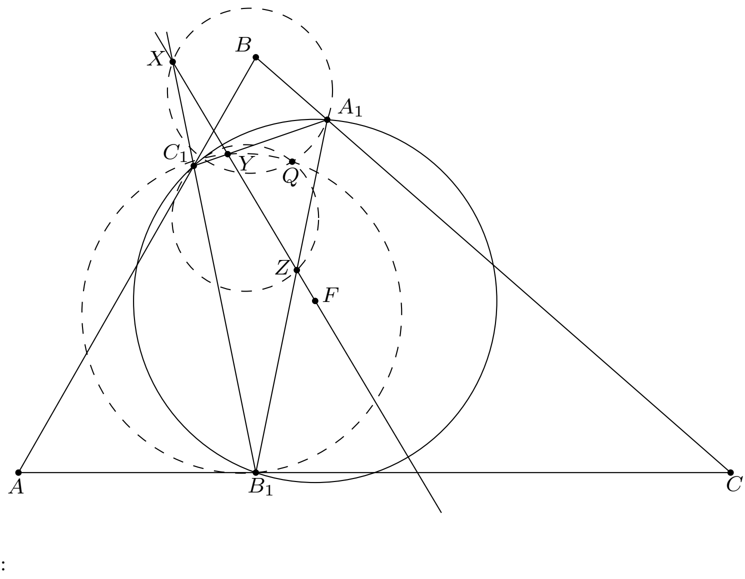
Nechť ABC je různostranný trojúhelník s kolmištěm H a opsištěm O. Paty výšek na strany BC, CA a AB označme popořadě A_1, B_1 a C_1. Přímka OH protíná přímky B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1 postupně v bodech X, Y a Z. Ukažte, že kružnice nad průměry A_1X, B_1Y a C_1Z mají všechny společný bod.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Přímka OH je Eulerovou přímkou trojúhelníku ABC, tedy prochází i středem F jeho Feuerbachovy kružnice. Tato kružnice je kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1B_1C_1$, takže dle druhé Fonteného věty platí, že na Feuerbachově kružnici trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží takový bod Q, že pro každý bod P na této přímce OH kružnice opsaná patám z P na přímky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 prochází bodem Q.

Nyní si stačí uvědomit, že kružnice opsaná patám z X (resp. Y, resp. Z) na strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ splývá s kružnicí nad průměrem A_1X (resp. B_1Y, resp. C_1Z). Takže všechny tyto kružnice procházejí bodem Q a jsme hotovi.



Poznámky:

Všechny doraziví úlohy dosáhly na plný počet bodů. Udělali jste mi fakt radost.

Danil Koževnikov se krom vzorového řešení pokusil úlohu zobecnit a dokázat, že pro libovolný trojúhelník ABC a trojici kolineárních bodů X, Y a Z na přímkách určených jeho stranami BC, CA a AB procházejí kružnice nad průměry AX, BY a CZ jedním bodem. Bohužel ovšem v poslední části důkazu udělal chybu, jinak by si vysloužil $+i$.

(Rado van Švarc)

Geometrie trojúhelníka 4 – Co se jinam nevešlo

Vítejte u posledního dílu seriálu. Zde si ukážeme několik dalších tvrzení o trojúhelnících. Většina z nich není příliš užitečná v MO, přesto jsou však zajímavá a myslíme si, že určitě stojí za to si je projít.

Než začneme, zopakujeme si značení z předchozích dílů, které zde budeme používat. Konkrétně to, že v trojúhelníku ABC značí I vepsiště; I_A, I_B a I_C připsiště; R, r, r_a, r_b a r_c poloměry kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnic připsaných; $\check{S}_A$, $\check{S}_B$ a $\check{S}_C$ Švrčkovy body; $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ antišvrky a A_0, B_0 a C_0 středy stran.

Středy středů

Ve druhém dílu jsme si mimo jiné řekli, že Švrčkův bod je středem úsečky spojující vepsiště a příslušné připsiště a že antišvrk je středem úsečky spojující příslušná připsiště. Díky této vlastnosti můžeme o některých dalších bodech prohlásit, že jsou „uprostřed“ mezi jinými, a některé vzdálenosti prohlásit za průměry jiných.

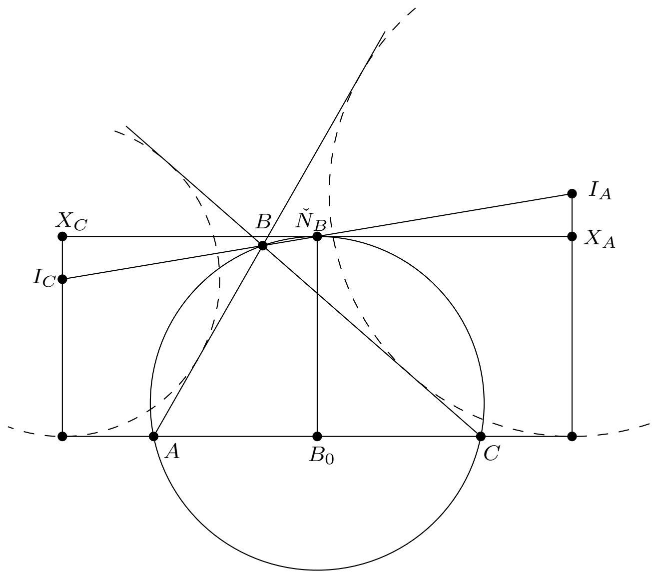
Tvrzení. *Platí* $|\check{N}_B B_0| = \frac{r_a+r_c}{2}$ a $|\check{S}_B B_0| = \frac{r_b-r}{2}$.

Toto tvrzení je lehce nahlédnutelné. Pokud si přímku AC nakreslíme vodorovně, pak velikost r_a, resp. r_c, popisuje, jak „vysoko“ je I_A, resp. I_C, nad přímkou AC. Protože $\check{N}_B$ je střed $I_A I_C$, bude nad AC „ve výšce“ $\frac{r_a+r_c}{2}$. Na druhou stranu $\check{N}_B B_0 \perp AC$, takže $|\check{N}_B B_0|$ opravdu vyjadřuje, jak „vysoko“ je $\check{N}_B$ nad AC. To nám dává první rovnost.

Druhou dokazovanou rovnost dostáváme analogicky díky tomu, že r a r_b popisují, jak vysoko jsou I nad a I_B pod AC, že $\check{S}_B$ je středem II_B a že $\check{S}_B B_0$ je úsečka, která měří příslušnou kolmou vzdálenost. Znaménko mínus se v rovnosti objevuje proto, že I je na opačné straně od AC než $\check{S}_B$ a I_B.

Kdybychom chtěli tyto myšlenky převést do formálnější podoby, mohli bychom to udělat takto:

Důkaz. Buď ℓ přímka skrze $\check{N}_B$ rovnoběžná s AC. Nechť X_A a X_C jsou paty kolmic z I_A a I_C na ℓ. BÚNO nechť I_C leží v pásu mezi přímkami AC a ℓ. Protože $I_A X_A \perp \ell \perp I_C X_C$ a $|I_A \check{N}_B| = |I_C \check{N}_B|$, jsou trojúhelníky $I_A X_A \check{N}_B$ a $I_C X_C \check{N}_B$ dle věty *usu* shodné. Proto $|I_A X_A| = |I_C X_C|$. Ale protože vzdálenost mezi přímkami ℓ a AC je $|\check{N}_B B_0|$, platí $|I_A X_A| = r_a - |\check{N}_B B_0|$ a $|I_C X_C| = |\check{N}_B B_0| - r_c$. Z toho už dostaneme první část zkoumaného tvrzení. Druhá část se provede analogicky.



Důsledek. *Platí* $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Důkaz. Úsečka $\check{N}_B\check{S}_B$ obsahuje B_0 a tvoří průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Platí tedy

$$4R = 2 \cdot |\check{N}_B\check{S}_B| = 2 \cdot \left(|\check{N}_B B_0| + |B_0\check{S}_B|\right) = 2 \cdot \left(\frac{r_a + r_c}{2} + \frac{r_b - r}{2}\right) = r_a + r_b + r_c - r.$$

Cvičení. Ukažte, že obvod šestiúhelníku $A\check{S}_C B\check{S}_A C\check{S}_B$ je alespoň $4(R + r)$.

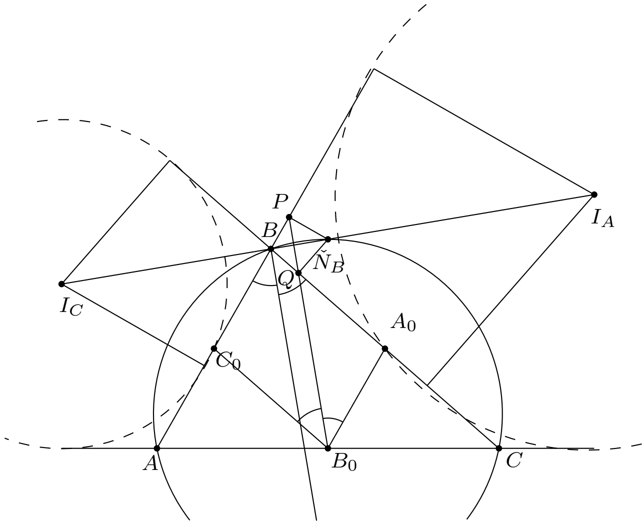
Návod. Uvědomte si, že $|A\check{S}_B| + |\check{S}_B C| = |II_B|$, a použijte $|II_B| \geq r + r_b$ spolu s předchozím důsledkem.

Průměrovat různé délky však lze i jinými způsoby. Příkladem budiž následující tvrzení.

Tvrzení. *Potenční střed kružnic připsaných trojúhelníku ABC je vepsištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$.*

Důkaz. Označme si kružnice připsané jako ω_A, ω_B a ω_C. Dále si označme Simsonovy přímky bodů $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ vzhledem k trojúhelníku ABC jako ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C. Začneme pozorováním, že ℓ_B je chordálou kružnic ω_A a ω_C.

Proč tomu tak je? Přímky AB, BC i CA jsou společné tečny ω_A a ω_C. Vyberme si libovolnou z nich a spusťme na ni kolmice z I_A, $\check{N}_B$ a I_C. Ty ji protnou v bodech X, Y a Z. Protože $\check{N}_B$ je střed I_AI_C, dá se lehce nahlédnout (a dokázat podobně jako v předchozím tvrzení), že Y je střed XZ. Ovšem X a Z jsou doteky ω_A a ω_C s naší vybranou přímkou, takže mocnost bodu Y k ω_A, resp. ω_C, je $|XY|^2$, resp. $|YZ|^2$. Ale protože Y je střed XZ, jedná se o stejnou hodnotu, a tedy Y má k oběma kružnicím stejnou mocnost, neboli leží na jejich chordále. Toto platí pro patu kolmice z $\check{N}_B$ na libovolnou stranu trojúhelníka, takže ℓ_B skutečně splývá s chordálou ω_A a ω_C.



Nyní potřebujeme ukázat, že ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C skutečně procházejí vepsištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Zjevně to stačí ukázat jen pro ℓ_B.

Bod B_0 je patou kolmice z $\check{N}_B$ na AC, takže ℓ_B bodem B_0 prochází. Takže (protože trojúhelník $A_0B_0C_0$ je jen obraz ABC ve stejnolehlosti) stačí ukázat, že přímka ℓ_B je rovnoběžná s osou úhlu ABC.

Nechť P a Q jsou paty kolmic z $\check{N}_B$ na AB a BC. Protože $\check{N}_B$ je středem přímky I_AI_C, platí $|\check{N}_BP| = \frac{|r_a - r_c|}{2} = |\check{N}_BQ|$. (To nahlédneme podobným způsobem jako předchozí tvrzení.) Dále $|\sphericalangle BP\check{N}_B| = 90° = |\sphericalangle BQ\check{N}_B|$, takže z věty *Ssu* jsou trojúhelníky $B\check{N}_BP$ a $B\check{N}_BQ$ shodné. To ale znamená, že $PQ \perp \check{N}_BB$. Protože přímka PQ splývá s přímkou ℓ_B, přímka $\check{N}_BB$ je osou vnějšího úhlu ABC a osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, dostáváme to, co jsme chtěli.

Cvičení. Pomocí úvah tohoto typu si uvědomte, proč se na sebe body dotyku kružnice vepsané a připsané vzájemně zobrazují přes střed strany.

Návod. Využijte toho, že se jedná o projekce z vepsiště, připsiště a Švrčkova bodu mezi nimi.

Cvičení. Ukažte, že pokud $r + r_a = |BC|$, pak je trojúhelník ABC pravoúhlý. (MO 2016)

Návod. BÚNO zvolte $|AB| < |AC|$ a označte X jako patu kolmice z $\check{S}_A$ na AB. Podívejte se na čtyřúhelník $BX\check{N}_BB_0$ a všimněte si, že má protější strany stejně dlouhé. Za pomoci tětivovosti a kolmostí pak ukažte, že se jedná o obdélník.

Sondatova věta

V této kapitolce si ukážeme nejjednodušší část takzvané Sondatovy věty. Ta se ve skutečnosti skládá ze tří dílčích tvrzení, ale pro důkaz zbylých dvou bychom museli vybudovat další arzenál, čítající mimo jiné Newtonovu–Gaussovu větu o čtyřúhelníku a Desarguesovu větu. I s nimi by důkaz byl velmi dlouhý a náročný, rozhodli jsme se tedy druhou a třetí část věty neuvádět. První část si však můžete vychutnat v její plné kráse.

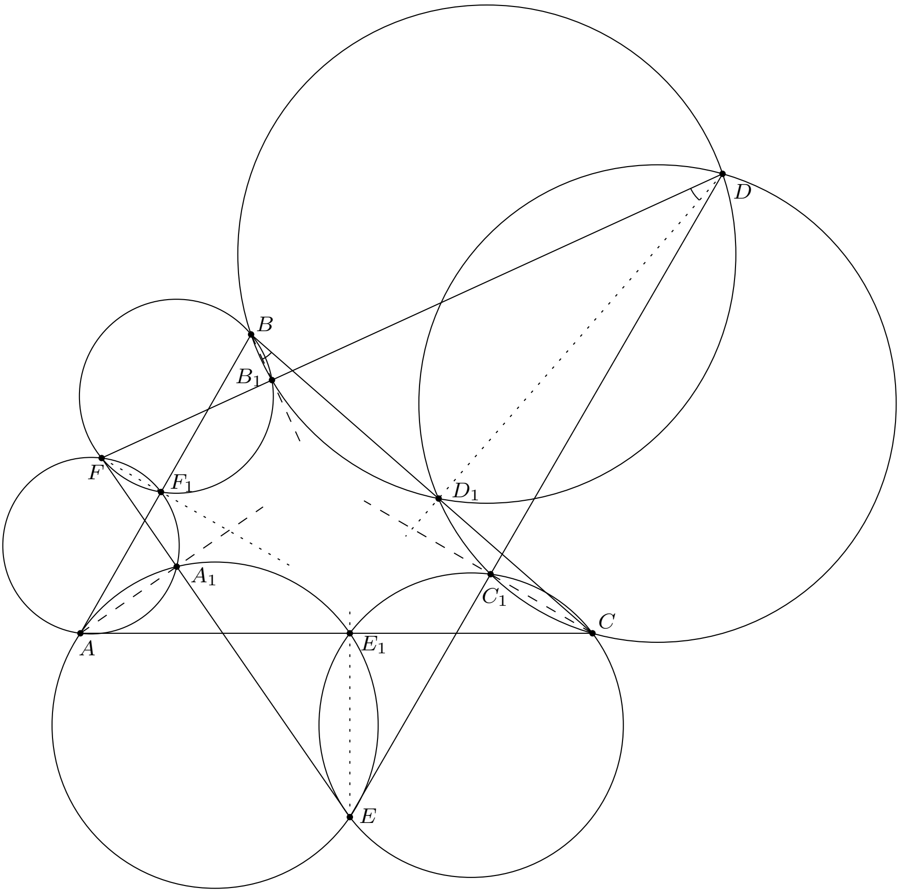
Budeme říkat, že trojúhelník ABC je *kolmý na trojúhelník* DEF, pokud platí, že kolmice z A na EF, kolmice z B na FD a kolmice z C na DE se protínají v jednom bodě. Uvědomme si, že výrok

„trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF“ je ekvivalentní s „trojúhelník BCA je kolmý na trojúhelník EFD“, ale ne s „trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník EFD“.

Věta. (Sondatova) *Trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF právě tehdy, když je trojúhelník DEF kolmý na trojúhelník ABC.*

Důkaz. Paty kolmic z A, B, C, D, E a F na EF, FD, DE, BC, CA a AB označme A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1. Chceme ukázat, že AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když se DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě.

Pro jednoduchost předpokládejme, že konfigurace odpovídá našemu obrázku (pro obecnost bychom zavedli orientované úhly). Potom jsou čtyřúhelníky AA_1F_1F, FF_1B_1B, BB_1D_1D, DD_1C_1C, CC_1E_1E a EE_1A_1A tětivové, protože pravé úhly nám dávají Thaletovy kružnice. To znamená, že $|\sphericalangle B_1BC| = |\sphericalangle B_1BD_1| = |\sphericalangle B_1DD_1| = |\sphericalangle FDD_1|$. Analogicky dostaneme rovnost dalších pěti dvojic úhlů.



To, že se přímky AA_1, BB_1 a CC_1 protínají v jednom bodě, je podle goniometrické Cevovy věty ekvivalentní vztahu

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB|\sin|\sphericalangle B_1BC|\sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC|\sin|\sphericalangle B_1BA|\sin|\sphericalangle C_1CB|} = 1.$$

Analogicky to, že se přímky DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě, je ekvivalentní

$$\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|}=1.$$

Ovšem díky našim vztahům mezi úhly je

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB|\sin|\sphericalangle B_1BC|\sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC|\sin|\sphericalangle B_1BA|\sin|\sphericalangle C_1CB|}=\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|},$$

neboli levé strany uvedených vztahů jsou si rovny. Tím je důkaz dokončen.

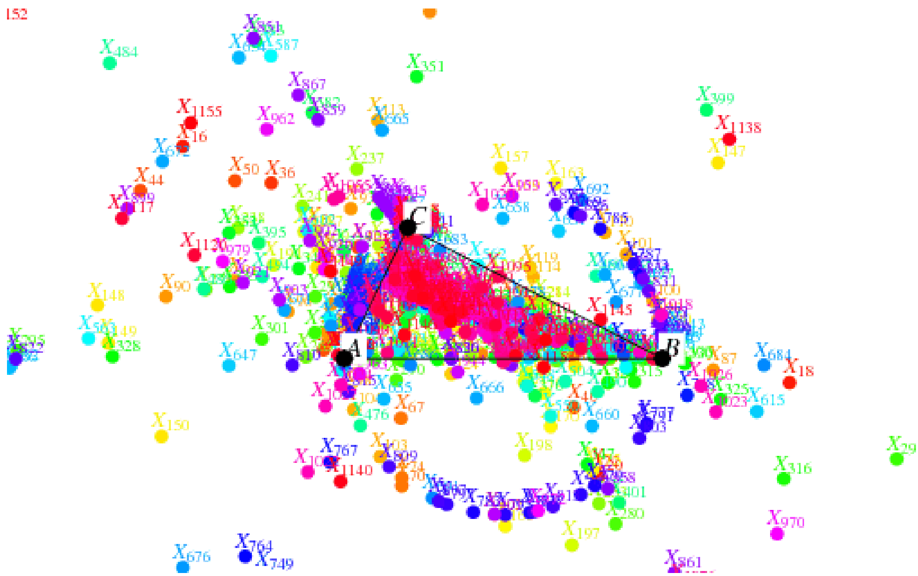
Cvičení. Buď ABC trojúhelník a D, E a F body takové, že $|BD|=|DC|$, $|CE|=|EA|$ a $|AF|=|FB|$. Ukažte, že kolmice z A, B a C na EF, FD a DE se protínají v jednom bodě.

Návod. Použijte Sondatovu větu.[11] Potom si uvědomte, že chcete ukázat, že se osy stran protínají v jednom bodě.

Cvičení. V trojúhelníku ABC si označme paty výšek jako D, E a F. Označme X, Y a Z středy úseček AD, BE a CF. Dokažte, že kolmice z D, E a F na YZ, ZX a XY se protínají v jednom bodě. (EMC 2013)

Podivné přátelství mezi středy

V průběhu seriálu jsme si ukázali několik středů trojúhelníka. Známých středů existuje opravdu nezměrné množství; encyklopedie středů trojúhelníka[12] jich v době psaní tohoto dílu vedla 13390. Zde je vykresleno několik prvních:[13]



[11] Vřele doporučujeme si úlohu vyřešit i bez použití Sondatovy věty. Cvičení se tím stane o dost obtížnějším, ale řešení je velmi pěkné. Návod zní (a pozor, přicházejí spoilery), že si chcete dokreslit tři vhodné kružnice a všimnout si, že se vlastně jedná o tvrzení o potenčním středu.

[12] Viz *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*.

[13] Na adrese *http://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html* najdete tento obrázek v duhově barevné formě.

Zajímavým cvičením v matematické výřečnosti je úkol formulovat, co vlastně slovní spojení „střed trojúhelníka“ přesně znamená. Zkuste teď na chvíli přestat číst a zamyslet se nad tím. (Varujeme, že následující dva odstavce a výsledná definice možná budou někomu připadat nehezké, některým mohou až působit pocity nevolnosti. V případě silné alergické reakce na algebru je možné příslušný úsek přeskočit, pro pochopení dalšího textu není příliš důležitý.)

Máte? Pokud ano, pravděpodobně jste došli k lehce neintuitivnímu poznání, že střed trojúhelníka vlastně není bod, ale funkce, která vrcholům každého trojúhelníka daný bod přisuzuje. A to ještě relativně specifickým způsobem. Zaprvé by střed měl být přiřazen symetricky, bez ohledu na pojmenování bodů. Takže připsiště není střed. Navíc asi platí, že při zmenšení/posunutí/otočení/překlopení by se střed měl stejným způsobem zmenšit/posunout/otočit/překlopit. A nezapomeňte na to, že naše funkce není nutně definovaná úplně pro všechny trojice bodů v rovině – pro degenerované trojúhelníky mnoho středů přestává existovat. A když už jsme u toho definování, možná není úplně od věci zamyslet se, co je to vlastně bod v rovině. Většinou se k pořádné definice roviny používají kartézské souřadnice a tam je opravdu nemotorné mluvit o obecném otáčení, překlápění a podobných zobrazeních.

Kdybychom opravdu chtěli střed definovat formálně, bylo by asi nejvhodnější si body zavést pomocí komplexních čísel[14], kde se se zobrazeními obvykle pracuje vcelku dobře. Nejlepší definice, se kterou autoři přišli, je následující:

Definice. Nechť T je množina všech trojic $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, kde $A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A} \neq \overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A$.[15] Potom jako *střed trojúhelníka* označujeme jakoukoliv symetrickou funkci $f : T \to \mathbb{C}$, která pro každé $(A, B, C) \in T$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $\alpha \neq 0$ splňuje $f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \overline{f(A, B, C)}$ a $f(\alpha A + \beta, \alpha B + \beta, \alpha C + \beta) = \alpha f(A, B, C) + \beta$.

Některé z vás určitě tato podivná a pro naše účely zbytečně formální definice vyděsila nebo odradila. Nic si z toho nedělejte. Pro naše účely je důležité primárně to, že na střed spíš než jako na konkrétní bod budeme koukat jako na způsob, jak trojúhelníku bod přiřadit. A s touto vědomostí se můžeme vrátit zpátky ke geometrii.

Některé dvojice středů nyní budeme označovat jako *přátele*[16] (pozor, neplést s kamarády). O dvojici středů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ řekneme, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, pokud platí následující výrok: Když v libovolném trojúhelníku ABC sestrojíme čtverce nad stranami A_BBCA_C, B_CCAB_A a C_AABC_B neprotínající ABC a když si označíme jako P^A, P^B a P^C postupně $\mathcal{P}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C, pak se přímky AP^A, BP^B a CP^C protínají v jednom bodě Q, který je $\mathcal{Q}$-středem trojúhelníka ABC.

Zmatení? Ukažme si to na příkladu.

Tvrzení. *Opsiště je přítel Lemoinova bodu.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a příslušné čtverce. Označíme si jako O^A, O^B a O^C opsiště trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C. Abychom ukázali, že opsiště je přítel Lemoinova bodu, je třeba ukázat, že AO^A, BO^B a CO^C se protínají v Lemoinově bodě K trojúhelníku ABC, neboli že se jedná o symediány.

Jak uděláme toto?

Buď U_B obraz bodu O^B ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem 2. Zjevně stačí ukázat, že BU_B je symediána v ABC. Protože O^B je střed trojúhelníku C_BBA_B, platí $|\sphericalangle U_BA_BB| = |\sphericalangle U_BC_BB| = 90°$. Tedy U_B je průsečík přímek C_AC_B a A_BA_C. Protože se jedná o rovnoběžky se stranami AB a BC, dostáváme, že vzdálenost bodu U_B od přímek AB a BC je (díky pravým úhlům ve čtverci) rovna $|C_BB|$ a $|A_BB|$, což je zase rovno $|AB|$ a $|BC|$. Ale symediána je tvořena právě

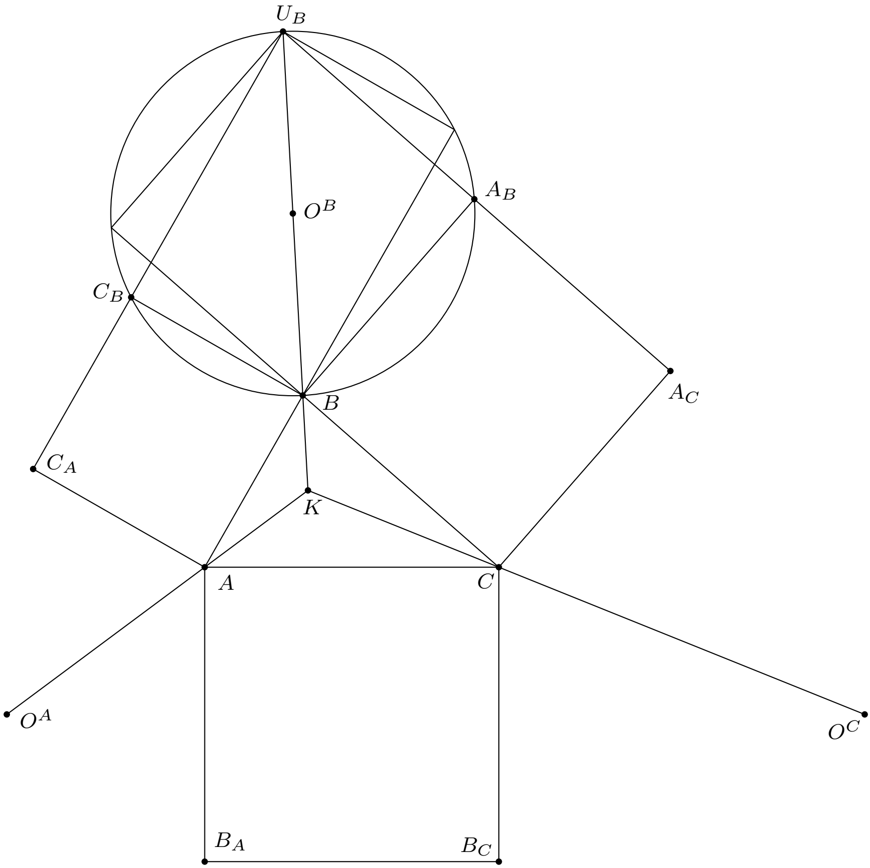
---

[14]Pokud jste komplexní čísla v životě nepotkali, následující definici zcela beze studu přeskočte.

[15]Jak asi chápete, toto jsou přesně trojice tvořící nedegenerované trojúhelníky.

[16]Anglická literatura využívá termínu *friends*. V české literatuře tento termín vzhledem ke své obskurnosti nemá ustálený překlad.

body, které mají poměr vzdáleností ke stranám trojúhelníku roven poměru délek těchto stran.[17] Takže U_B leží na B-symediáně a jsme hotovi.



Je jasné, že každý střed $\mathcal{P}$ má nanejvýš jednoho přítele – střed, který případně můžeme zadefinovat právě jako průsečík zmíněných přímek AP^A, BP^B, CP^C. Na druhou stranu kupříkladu střed Feuerbachovy kružnice přítele nemá, protože se příslušná trojice přímek neprotne. O tom se můžeme rychle přesvědčit například rychlým nákresem v nějakém kreslicím programu. (Tady pozor, kreslicí program nás o tomto sice může rychle přesvědčit, to však samozřejmě není pořádný důkaz. Ten by však byl vcelku technický, proto ho zde nebudeme provádět.)

Je asi zjevné, že když vztah nazýváme přátelstvím, měl by být symetrický. Tak si dokažme, že vskutku je.

Tvrzení. *Pokud je $\mathcal{P}$ přítel $\mathcal{Q}$, pak je $\mathcal{Q}$ přítel $\mathcal{P}$.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a k němu příslušné body A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B. Označme jako Q^A, Q^B a Q^C postupně $\mathcal{Q}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C.

[17] Viz Cvičení 58 v druhém dílu.

Dále si jako P označme $\mathcal{P}$-střed trojúhelníku ABC. Chceme ukázat, že $Q^A A$, $Q^B B$ a $Q^C C$ se protínají v bodě P.

Zaměřme se na trojúhelník $C_B B A_B$. Čtverce $C_B B A C_A$ a $A_B B C A_C$ jsou čtverce i nad jeho stranami a ABC je trojúhelník příslušející vrcholu B v $C_B B A_B$. Proto použitím skutečnosti, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, na trojúhelník $C_B B A_B$ dostaneme, že PB prochází Q^B. To ale znamená, že $Q^B B$ prochází P. Analogicky dokážeme tvrzení pro zbylé dvě přímky.

Uvědomme si, čím se přátelství liší od kamarádství. Kamarádství je závislé na trojúhelníku a pojí dvojice bodů v rovině. Přátelství je daleko abstraktnější pojem, mluví totiž o dvojicích obecných středů, nevázaných na konkrétní trojúhelník. Přesto spolu kamarádství a přátelství trochu souvisí.

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ je dvojice přátel. Jako $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ si označme středy definované jako kamarády $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. Pak $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ jsou přátelé.*

Důkaz. Osa úhlu ABC na sebe převádí AB a BC. Protože $AB \perp BC_B$ a $A_B B \perp BC$, převádí na sebe i BC_B a BA_B. Takže se jedná i o osu úhlu $C_B B A_B$. Proto se na sebe převádějí i spojnice B s příslušnými středy, a my máme hotovo.

Důsledek. *Kolmiště a těžiště jsou přátelé.*

Cvičení. Dokažte, že vepsiště je svým vlastním přítelem.

Cvičení. Dokažte, že kolmiště a těžiště jsou přátelé, bez použití předchozího tvrzení.

Návod. Ukažte, že těžiště je přítelem kolmiště – uvažujte bod X takový, že $A_B X C_B B$ je rovnoběžník, a ukažte $XB \perp AC$.

Pokud vymyslíte, jak bez použití symetrie přátelství ukázat, že kolmiště je přítel těžiště, zašlete prosím své řešení na *mks@mff.cuni.cz*. Autoři seriálu jsou na něj zvědaví a pěkným řešením si získáte jejich nehynoucí obdiv (a za obzvlášť pěkné možná i nějakou čokoládu).

Závěr

Tímto bychom se s vámi rádi rozloučili. Doufáme, že jste si naši okružní jízdu trojúhelníkem užili a že jste se během ní něco naučili. Jako vždy platí, že se v případě jakýchkoliv dotazů můžete bez obav obrátit na mail *mks@mff.cuni.cz* nebo přímo na autory. Přejeme vám, ať se vám i vaše další setkání s trojúhelníkem (a obecně geometrií) líbí.

Zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *106 Geometry Problems from the AwesomeMath Summer Program*,

[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *107 Geometry Problems from the Awesomemath Year-Round Program*,

[3] Cosmin Pohoata, Titu Andreescu: *110 Geometry Problems for the International Mathematical Olympiad*,

[4] Bocanu Marius: *On Fontené's Theorems*,

[5] Linh Nguyen Van: *Fontene Theorems and Some Corollaries*,

[6] Michal „Kenny“ Rolínek, *Geometrie trojúhelníka*, sborníkový příspěvek MKS, Staré město, 2009,

[7] Michal „Kenny“ Rolínek, *Antirovoběžnost*, sborníkový příspěvek MKS, Oldřichov, 2012,

[8] Michal „Kenny“ Rolínek, *Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál*, sborníkový příspěvek iKS, Hostětín, 2012,

[9] Josef Tkadlec, *Dokreslování*, sborníkový příspěvek MKS, Horní Lysečiny, 2013,
[10] Dominik Teiml, *The Euler Line*, Extended Essay in Mathematics, The English College in Prague, 2013.

Výsledky seriálu

	Jméno	*Příjmení*	r.	Škola	1s	2s	3s	celkem	hist.
1.–3.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	15	15	15	**45,00**	519
1.–3.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	15	15	15	**45,00**	424
1.–3.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	15	15	15	**45,00**	909
4.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	14	15	15	**43,71**	405
5.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	15	15	11	**41,41**	203
6.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	15	15	10	**40,07**	105
7.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	12	13	13	**37,84**	38
8.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	13	15	9	**36,17**	36
9.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	15	15	6	**35,51**	387
10.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	15	12	7	**33,44**	182
11.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	9	15	6	**30,57**	224
12.–13.	*František*	*Couf*	4	EKO GPraha	15	15	–	**30,00**	731
12.–13.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	15	15	–	**30,00**	30
14.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	7	7	15	**29,90**	235
15.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	7	11	11	**29,45**	202
16.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	9	4	15	**27,89**	419
17.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	12	15	–	**26,93**	27
18.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	11	11	–	**22,78**	202
19.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	6	15	–	**20,93**	338
20.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	7	11	–	**18,51**	19
21.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	10	7	2	**18,37**	137
22.–24.	*Filip*	*Bialas*	4	GOpatovPH	15	–	–	**15,00**	684
22.–24.	*Jáchym*	*Solecký*	4	PORG PH	15	–	–	**15,00**	216
22.–24.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	–	15	0	**15,00**	250
25.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	9	5	–	**14,66**	201
26.	*Veronika*	*Hladíková*	4	GMikul23PL	15	–	–	**14,55**	347
27.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	13	–	–	**12,66**	13
28.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	4	5	3	**12,00**	426
29.	*Jakub*	*Suchánek*	3	GOpatovPH	–	11	–	**11,00**	11
30.	*Jana*	*Pallová*	2	GJŠkodyPŘ	11	–	–	**10,62**	169
31.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	10	–	–	**10,06**	77
32.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	4	6	–	**9,77**	182
33.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	9	–	–	**9,45**	9
34.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	9	–	–	**8,94**	166
35.	*Jan*	*Vondra*	1	G TýnNVlt	9	–	–	**8,51**	9
36.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	8	–	–	**8,18**	553
37.	*Tomáš*	*Domes*	4	MendelG OP	8	–	–	**8,14**	338
38.–40.	*Oldřich*	*Jandl*	2	NPorg	7	–	–	**7,36**	7

38.–40.	*Michal*	*Jelínek*	2	GOhradníPH	7	–	–	**7,36**	7
38.–40.	*Jakub*	*Růžička*	2	G Nymburk	–	7	–	**7,36**	7
41.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	7	–	–	**7,13**	63
42.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	7	–	–	**6,98**	99
43.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	7	–	–	**6,83**	135
44.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	7	–	–	**6,82**	136
45.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	7	–	–	**6,81**	139
46.–48.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	6	–	–	**6,40**	6
46.–48.	*Kristína*	*Szabová*	3	GVarŽilina	6	–	–	**6,40**	6
46.–48.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	–	6	–	**6,40**	6
49.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	–	6	–	**6,30**	27
50.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	6	–	–	**5,96**	94
51.	*Vojtěch*	*Lengál*	3	GZborovPH	6	–	–	**5,62**	150
52.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	5	–	–	**5,15**	213
53.–55.	*Ester*	*Friedlaenderová*	4	GKepleraPH	5	–	–	**5,00**	5
53.–55.	*Cyril*	*Škorvaga*	4	GKepleraPH	5	–	–	**5,00**	5
53.–55.	*Rafael*	*Tadevosjan*	4	GKepleraPH	5	–	–	**5,00**	5
56.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	–	–	5	**4,67**	129
57.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	5	–	–	**4,60**	141
58.	*Ondřej*	*Svoboda*	4	GJarošeBO	4	–	–	**4,01**	168
59.	*Vojtěch*	*Lanz*	3	GZborovPH	4	–	–	**3,84**	436
60.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	4	–	–	**3,59**	282
61.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	3	–	–	**3,36**	356
62.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	1	2	–	**3,00**	3
63.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	–	0	3	**2,51**	3
64.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	2	–	–	**1,85**	2
65.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	2	–	–	**1,77**	45
66.	*Přemysl*	*Kaucký*	3	MasG Plzeň	1	–	–	**1,45**	1
67.–69.	*Jan*	*Bohadlo*	3	G Náchod	0	–	–	**0,00**	0
67.–69.	*Iveta*	*Drašarová*	3	VOŠp SPgŠ	0	–	–	**0,00**	0
67.–69.	*Michaela*	*Holcová*	3	VOŠp SPgŠ	0	–	–	**0,00**	0

Výsledky jarní části

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1j	2j	3j	4j	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	25	25	25	35	15	15	**140,00**	614
2.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	24	25	25	35	15	15	**139,22**	1003
3.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	22	21	25	32	11	11	**123,60**	297
4.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	24	23	23	24	13	13	**120,24**	120
5.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	22	24	19	23	15	15	**118,82**	480
6.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	23	22	22	28	7	15	**116,56**	322
7.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	22	22	22	25	15	9	**115,98**	116
8.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	24	23	25	26	15	–	**113,14**	113
9.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	21	14	20	18	15	11	**99,69**	262
10.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	21	21	21	24	11	–	**97,62**	277
11.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	20	13	20	13	15	15	**96,30**	475
12.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	20	12	18	19	15	10	**94,22**	159
13.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	20	17	22	15	4	15	**92,95**	484
14.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	22	13	15	19	15	6	**89,14**	440
15.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	23	20	18	11	15	–	**88,11**	405
16.	*Jakub*	*Parada*	1	G Gröss BA	24	15	22	26	–	–	**87,73**	88
17.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	17	12	21	16	12	7	**84,90**	234
18.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	21	19	19	9	15	0	**82,77**	318
19.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	23	15	21	15	5	–	**79,46**	265
20.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	13	–	22	27	15	–	**77,63**	78
21.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	13	8	20	15	15	6	**77,44**	270
22.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	20	20	14	16	5	3	**77,28**	491
23.	*Jakub*	*Růžička*	2	G Nymburk	22	16	19	10	7	–	**73,51**	74
24.	*Evžen*	*Wybitul*	3		19	19	20	15	–	–	**72,92**	194
25.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	22	15	21	2	11	–	**70,75**	71
26.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	21	11	17	21	–	–	**70,70**	71
27.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	16	21	14	9	7	2	**69,26**	188
28.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	22	15	23	8	–	–	**67,75**	111
29.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	23	21	22	–	–	–	**66,14**	66
30.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	18	18	20	9	–	–	**65,09**	317
31.	*Jakub*	*Suchánek*	3	GOpatovPH	19	21	–	12	11	–	**62,75**	63
32.	*David*	*Ryzák*	3	G Trutnov	18	16	17	11	–	–	**61,82**	62
33.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	22	18	12	–	6	–	**59,37**	59
34.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	12	17	14	11	–	5	**59,32**	183
35.	*Veronika*	*Roubínová*	3	G Kadaň	15	10	17	13	–	–	**55,18**	186
36.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	11	17	16	11	–	–	**54,11**	142
37.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	15	11	15	11	–	–	**53,27**	189
38.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	21	8	16	6	–	–	**50,94**	118

39.	*Alexandra*	*Géciová*	1	GJHroncaBA	19	12	11	9	–	–	**50,78**	51
40.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	8	14	15	11	0	3	**50,58**	51
41.	*Martin*	*Hubata*	1	GMikul23PL	19	12	19	–	–	–	**49,53**	50
42.	*Michal*	*Chudoba*	2	GLitoměřPH	14	12	14	8	–	–	**49,29**	135
43.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	17	17	12	2	–	–	**47,69**	180
44.	*Jan*	*Hrůza*	4	G Kadaň	13	11	14	10	–	–	**46,68**	152
45.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	22	0	23	–	–	–	**44,75**	45
46.	*Petr*	*Ježek*	3	GBNěmcovHK	15	11	15	4	–	–	**44,70**	192
47.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	16	11	10	8	–	–	**44,61**	173
48.	*Tatiana*	*Ondrejková*	1	GNovéZámky	15	15	10	3	–	–	**42,53**	43
49.	*David*	*Klement*	1	GNadAlejPH	15	7	11	9	–	–	**42,21**	42
50.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	15	10	9	6	–	–	**40,25**	248
51.	*Julie*	*Přerovská*	1	GNVPlániPH	13	7	15	5	–	–	**39,93**	40
52.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	17	8	–	7	6	–	**38,53**	211
53.	*Radka*	*Křížová*	1	GHeyrovPH	11	8	17	–	–	–	**36,26**	36
54.	*Veronika*	*Šritterová*	1	PORG PH	13	11	7	5	–	–	**35,94**	36
55.	*Ludmila*	*Bujnovská*	3	MendelG OP	16	9	9	–	–	–	**34,70**	35
56.–57.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	18	17	–	–	–	–	**34,68**	580
56.–57.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	21	8	–	–	6	–	**34,68**	56
58.	*Vojtěch*	*Šára*	2	PORG PH	11	11	9	2	–	–	**32,85**	33
59.	*Oldřich*	*Jandl*	2	NPorg	–	18	13	2	–	–	**32,70**	33
60.	*Filip*	*Chudoba*	3	PORG PH	6	10	7	5	–	–	**26,55**	193
61.	*Jaromír*	*Sladkovský*	2	PORG PH	21	6	–	–	–	–	**26,52**	27
62.	*Matouš*	*Moravec*	1	PORG PH	7	5	13	–	–	–	**24,32**	24
63.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	13	9	2	–	–	–	**24,02**	116
64.	*Viktor*	*Fukala*	0	GKepleraPH	–	–	–	24	–	–	**23,88**	24
65.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	ZŠ Slov	12	12	–	–	–	–	**23,32**	23
66.	*David*	*Beinhauer*	2	MendelG OP	–	5	18	–	–	–	**23,04**	23
67.	*Matěj*	*Krátký*	1	PORG PH	14	–	–	9	–	–	**22,96**	23
68.	*Josef*	*Král*	2	MendelG OP	–	8	14	–	–	–	**22,22**	22
69.	*Karel*	*Balej*	2	G Rokycany	13	8	–	–	–	–	**21,17**	21
70.	*Václav*	*Kubíček*	3	AGKroměříž	–	–	21	–	–	–	**20,63**	21
71.	*Šimon*	*Chvátil*	2	GBNěmcovHK	20	–	–	–	–	–	**20,24**	161
72.	*Vojta*	*Staněk*	3	PORG PH	8	8	4	0	–	–	**20,23**	20
73.	*Martin*	*Pašen*	4	GRaymanaPV	16	4	–	–	–	–	**20,12**	126
74.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	12	8	–	–	–	–	**19,67**	177
75.	*Jakub*	*Čurda*	2	PORG PH	5	6	5	4	–	–	**19,42**	47
76.	*Jan*	*Vondra*	1	G TýnNVlt	11	3	5	0	–	–	**18,94**	19
77.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	9	10	–	–	–	–	**18,48**	147
78.	*Nikol*	*Krejčí*	1	PORG PH	–	8	7	3	–	–	**18,02**	18
79.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	7	4	7	–	–	–	**17,40**	295
80.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	4	2	9	–	–	–	**15,04**	15
81.	*František*	*Couf*	4	EKO GPraha	–	–	–	–	15	–	**15,00**	716
82.	*Jan*	*Nekarda*	1	GUHradiště	–	–	15	–	–	–	**14,89**	15
83.	*Alžběta*	*Neubauerová*	3	GNadKavaPH	–	–	14	–	–	–	**14,26**	145
84.	*Anna*	*Musilová*	1	PORG PH	6	2	0	5	–	–	**13,13**	82
85.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	8	3	–	–	2	–	**12,73**	13
86.	*Matej*	*Kvorka*	3	GŠkolDubni	5	–	–	7	–	–	**11,76**	69
87.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	10	–	–	–	–	–	**9,63**	363
88.	*Matěj*	*Holubička*	1	G Hořice	–	–	7	3	–	–	**9,54**	10
89.	*Magdaléna*	*Bártová*	2	GDašickáPA	9	–	–	–	–	–	**9,48**	9
90.	*Ondřej*	*Dušek*	3	PORG PH	9	–	–	–	–	–	**9,36**	119

91.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	9	–	–	–	–	–	**9,11**	65
92.	*Veronika*	*Hladíková*	4	GMikul23PL	–	9	–	–	–	–	**8,84**	341
93.	*Julie*	*Rubášová*	0	BiskG Brno	8	–	–	–	–	–	**8,34**	8
94.	*Anna*	*Šírová*	3	GJilemnice	7	–	–	–	–	–	**7,49**	77
95.–96.	*Dita*	*Chabičovská*	1	GNadKavaPH	7	–	–	–	–	–	**6,79**	7
95.–96.	*Anna*	*Švarcová*	1	G Prachati	7	0	–	0	–	–	**6,79**	7
97.	*Přemysl*	*Kaucký*	3	MasG Plzeň	–	6	–	0	–	–	**5,53**	6
98.	*David*	*Šnajdr*	2	GMikul23PL	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
99.	*Viktor*	*Materna*	1	GJarošeBO	–	–	–	5	–	–	**5,13**	5
100.	*Adam*	*Ječmínek*	0	G Česká ČB	4	–	–	–	–	–	**3,66**	4
101.	*David*	*Ha*	2	MasG Plzeň	–	–	2	–	–	–	**1,91**	2
102.–104.	*Martina*	*Hofmanová*	2	G Mělník	0	–	–	–	–	–	**0,00**	0
102.–104.	*Denisa*	*Jandová*	2	GMikul23PL	0	–	–	–	–	–	**0,00**	0
102.–104.	*Tomáš*	*Konečný*	4	GJirsíkaČB	0	–	–	–	–	–	**0,00**	456

Výsledky 36. ročníku

	Jméno	*Příjmení*	r.	Škola	1p	2p	3p	4p	1j	2j	3j	4j	1s	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	25	25	25	25	25	25	25	35	15	15	15	**255,00**	729
2.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	22	24	25	20	24	25	25	35	15	15	15	**245,88**	1110
3.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	25	24	19	25	22	24	19	23	14	15	15	**225,35**	586
4.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	22	23	24	22	24	23	23	24	12	13	13	**222,14**	222
5.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	23	24	23	24	24	23	25	26	12	15	–	**219,02**	219
6.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	22	22	23	22	22	22	22	25	13	15	9	**218,87**	219
7.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	17	21	21	22	22	21	25	32	7	11	11	**211,00**	384
8.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	23	18	17	22	23	22	22	28	7	7	15	**203,52**	409
9.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	16	24	21	22	21	14	20	18	15	15	11	**197,19**	359
10.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	23	20	19	17	21	21	21	24	11	11	–	**187,52**	367
11.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	19	13	20	22	20	13	20	13	15	15	15	**185,05**	564
12.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GFXŠaldyLI	17	22	15	19	20	12	18	19	15	15	10	**182,31**	247
13.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	20	20	19	17	22	13	15	19	15	15	6	**179,97**	531
14.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	25	15	15	22	20	17	22	15	9	4	15	**179,23**	570
15.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	21	22	21	21	13	–	22	27	15	15	–	**176,69**	177
16.	*Jakub*	*Parada*	1	G Gröss BA	22	22	22	21	24	15	22	26	–	–	–	**174,59**	175
17.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	17	21	20	16	17	12	21	16	15	12	7	**173,89**	323
18.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	23	19	22	16	23	20	18	11	6	15	–	**173,40**	490
19.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	23	23	21	22	23	21	22	–	13	–	–	**168,82**	169
20.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	17	21	18	19	23	15	21	15	9	5	–	**164,54**	351
21.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	21	16	19	12	21	11	17	21	6	–	–	**145,30**	145
22.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	15	19	17	15	22	15	21	2	7	11	–	**144,48**	144
23.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	22	21	16	22	22	18	12	–	–	6	–	**140,35**	140
24.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	15	11	14	15	20	20	14	16	4	5	3	**136,17**	550
25.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	18	17	21	10	22	15	23	8	2	–	–	**135,39**	178
26.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	17	21	13	24	22	0	23	–	9	–	–	**129,54**	130
27.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	13	13	15	–	13	8	20	15	9	15	6	**129,17**	322
28.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	14	9	10	12	16	21	14	9	10	7	2	**124,17**	243
29.	*Evžen*	*Wybitul*	3		12	15	11	10	19	19	20	15	–	–	–	**122,30**	243
30.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	22	17	17	3	21	8	16	6	10	–	–	**119,12**	186
31.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	16	18	18	–	18	18	20	9	–	–	–	**117,32**	369
32.	*Martin*	*Hubata*	1	GMikul23PL	19	17	19	8	19	12	19	–	–	–	–	**112,64**	113
33.	*Filip*	*Bialas*	4	GOpatovPH	25	25	21	25	–	–	–	–	15	–	–	**110,72**	780
34.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	17	11	18	4	11	17	16	11	6	–	–	**108,64**	197
35.	*Radka*	*Křížová*	1	GHeyrovPH	21	20	14	13	11	8	17	–	–	–	–	**104,01**	104
36.	*Veronika*	*Roubínová*	3	G Kadaň	17	15	14	–	15	10	17	13	–	–	–	**101,82**	233
37.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	19	13	14	–	17	17	12	2	7	–	–	**100,49**	232
38.	*Veronika*	*Hladíková*	4	GMikul23PL	16	22	19	18	–	9	–	–	15	–	–	**97,90**	430

39.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	12	9	13	4	15	11	15	11	5	–	–	**95,96**	232
40.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	9	17	14	9	15	10	9	6	5	–	–	**95,41**	303
41.	*Michal*	*Chudoba*	2	GLitoměřPH	14	18	13	–	14	12	14	8	–	–	–	**95,33**	181
42.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	11	16	12	3	16	11	10	8	7	–	–	**93,85**	222
43.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	14	13	11	5	8	14	15	11	–	0	3	**93,30**	93
44.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	14	10	9	–	12	17	14	11	–	–	5	**93,16**	217
45.	*David*	*Klement*	1	GNadAlejPH	14	15	17	5	15	7	11	9	–	–	–	**92,63**	93
46.	*Oldřich*	*Jandl*	2	NPorg	18	16	17	–	–	18	13	2	7	–	–	**90,73**	91
47.	*Veronika*	*Šritterová*	1	PORG PH	19	17	13	7	13	11	7	5	–	–	–	**90,72**	91
48.	*Jiří*	*Vala*	3	GJarošeBO	–	6	–	–	21	19	19	9	–	15	0	**88,65**	324
49.	*Julie*	*Přerovská*	1	GNVPlániPH	11	15	8	11	13	7	15	5	–	–	–	**86,06**	86
50.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	19	18	12	9	12	8	–	–	9	–	–	**86,04**	243
51.	*Jáchym*	*Solecký*	4	PORG PH	17	12	20	22	–	–	–	–	15	–	–	**85,69**	287
52.	*Ludmila*	*Bujnovská*	3	MendelG OP	20	13	17	–	16	9	9	–	–	–	–	**85,27**	85
53.	*Jan*	*Hrůza*	4	G Kadaň	11	13	12	3	13	11	14	10	–	–	–	**84,82**	190
54.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	12	16	11	–	18	17	–	–	8	–	–	**81,91**	627
55.	*Petr*	*Ježek*	3	GBNěmcovHK	13	16	7	1	15	11	15	4	–	–	–	**81,83**	229
56.	*Tatiana*	*Ondrejková*	1	GNovéZámky	13	11	13	0	15	15	10	3	–	–	–	**79,19**	79
57.	*Jaromír*	*Sladkovský*	2	PORG PH	16	16	12	7	21	6	–	–	–	–	–	**77,17**	77
58.	*Tomáš*	*Domes*	4	MendelG OP	16	19	15	18	–	–	–	–	8	–	–	**76,00**	406
59.	*Miroslav*	*Macko*	1	ŠpMNDaG BA	22	20	15	17	–	–	–	–	–	–	–	**74,15**	74
60.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	19	17	8	16	8	3	–	–	1	2	–	**73,73**	74
61.	*Jakub*	*Růžička*	2	G Nymburk	–	–	–	–	22	16	19	10	–	7	–	**73,51**	74
62.	*Martin*	*Melicher*	2	GPošKošice	25	24	23	–	–	–	–	–	–	–	–	**71,74**	72
63.	*Martin*	*Pašen*	4	GRaymanaPV	15	14	14	10	16	4	–	–	–	–	–	**71,69**	178
64.	*Filip*	*Chudoba*	3	PORG PH	10	15	12	8	6	10	7	5	–	–	–	**70,76**	237
65.	*David*	*Ryzák*	3	G Trutnov	–	8	–	–	18	16	17	11	–	–	–	**69,82**	70
66.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	10	5	10	2	17	8	–	7	4	6	–	**69,34**	241
67.	*Matěj*	*Krátký*	1	PORG PH	13	17	14	–	14	–	–	9	–	–	–	**66,24**	66
68.	*Vojtěch*	*Šára*	2	PORG PH	–	11	11	12	11	11	9	2	–	–	–	**66,18**	66
69.	*Alexandra*	*Géciová*	1	GJHroncaBA	7	8	0	–	19	12	11	9	–	–	–	**66,05**	66
70.	*Jakub*	*Suchánek*	3	GOpatovPH	–	–	–	–	19	21	–	12	–	11	–	**62,75**	63
71.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	12	12	11	2	9	10	–	–	7	–	–	**62,15**	191
72.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	19	8	–	–	21	8	–	–	–	6	–	**61,40**	82
73.	*Jana*	*Pallová*	2	GJŠkodyPŘ	14	17	11	7	–	–	–	–	11	–	–	**59,15**	217
74.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	9	9	10	–	13	9	2	–	7	–	–	**58,85**	151
75.	*Vojtěch*	*Lanz*	3	GZborovPH	17	17	18	–	–	–	–	–	4	–	–	**56,74**	489
76.	*Nikol*	*Krejčí*	1	PORG PH	13	11	13	–	–	8	7	3	–	–	–	**54,68**	55
77.	*Julie*	*Rubášová*	0	BiskG Brno	17	14	13	–	8	–	–	–	–	–	–	**53,00**	53
78.	*Anna*	*Musilová*	1	PORG PH	6	11	12	11	6	2	0	5	–	–	–	**52,64**	122
79.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	16	9	9	0	4	2	9	–	2	–	–	**51,85**	52
80.	*Michal*	*Jelínek*	2	GOhradníPH	11	17	16	0	–	–	–	–	7	–	–	**50,98**	51
81.	*Josef*	*Král*	2	MendelG OP	–	14	13	–	–	8	14	–	–	–	–	**49,27**	49
82.	*Richard*	*Hladík*	4	GaOA MarLáz	19	18	12	–	–	–	–	–	–	–	–	**48,93**	302
83.	*Jan*	*Nekarda*	1	GUHradiště	18	16	–	–	–	–	15	–	–	–	–	**48,48**	48
84.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	13	9	10	–	9	–	–	–	7	–	–	**48,30**	104
85.	*Daniel*	*Bárta*	2	GChodoviPH	17	13	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**46,80**	47
86.	*Ondřej*	*Svoboda*	4	GJarošeBO	20	17	5	–	–	–	–	–	4	–	–	**46,28**	210
87.	*Kamila*	*Kyzlíková*	3	GZborovPH	13	16	12	5	–	–	–	–	–	–	–	**44,93**	289
88.	*Jakub*	*Čurda*	2	PORG PH	–	9	9	7	5	6	5	4	–	–	–	**44,60**	73
89.	*Jan*	*Vondra*	1	G TýnNVlt	–	8	8	–	11	3	5	0	9	–	–	**44,41**	44
90.	*Jan*	*Kaifer*	1	GKepleraPH	22	21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**43,73**	44

91.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	4	9	7	2	7	4	7	–	4	–	–	**42,80**	321
92.	*David*	*Šnajdr*	2	GMikul23PL	9	18	9	–	5	–	–	–	–	–	–	**42,00**	42
93.	*Rafael*	*Tadevosjan*	4	GKepleraPH	16	11	9	0	–	–	–	–	5	–	–	**41,00**	41
94.	*Jiří*	*Jechumtál*	4	GVoděraPH	15	12	14	–	–	–	–	–	–	–	–	**40,73**	41
95.	*kristian*	*Rigasz*	2	GJHroncaBA	16	14	11	–	–	–	–	–	–	–	–	**40,49**	40
96.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	13	10	5	1	10	–	–	–	3	–	–	**40,44**	393
97.	*Ondřej*	*Dušek*	3	PORG PH	7	9	14	–	9	–	–	–	–	–	–	**40,36**	150
98.	*Petr*	*Khartskhaev*	0	PORG PH	13	14	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**40,33**	40
99.	*Karel*	*Balej*	2	G Rokycany	19	–	–	–	13	8	–	–	–	–	–	**39,76**	40
100.	*Václav*	*Volhejn*	4	GKepleraPH	23	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**39,53**	187
101.	*Alžběta*	*Neubauerová*	3	GNadKavaPH	13	5	7	–	–	–	14	–	–	–	–	**39,25**	170
102.	*Victória*	*Žužičová*	2	GBilíkovBA	20	9	9	–	–	–	–	–	–	–	–	**39,08**	39
103.	*Timur*	*Sibgatullin*	2	PČGKarVary	21	5	12	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,26**	137
104.	*Václav*	*Kubíček*	3	AGKroměříž	17	–	–	–	–	–	21	–	–	–	–	**37,90**	38
105.	*Kristína*	*Szabová*	3	GVarŽilina	15	8	8	–	–	–	–	–	6	–	–	**37,83**	38
106.	*Matej*	*Moško*	2	G Gröss BA	22	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**36,57**	37
107.	*Daniel*	*Herman*	4	GŠroKošice	7	19	8	–	–	–	–	–	–	–	–	**34,74**	100
108.	*David*	*Dvořák*	3	G Konice	13	13	6	1	–	–	–	–	–	–	–	**33,94**	34
109.	*Anna*	*Šírová*	3	GJilemnice	10	7	9	–	7	–	–	–	–	–	–	**33,33**	103
110.	*Jonáš*	*Stoilov*	1	PORG PH	16	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,72**	33
111.	*Denisa*	*Chytilová*	3	GJŠkodyPŘ	18	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,49**	275
112.	*František*	*Záhorec*	1	G Roudnice	17	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,72**	32
113.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	ZŠ Slov	–	8	–	–	12	12	–	–	–	–	–	**31,66**	32
114.	*Anna*	*Kovárnová*	2	G Jírov ČB	19	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,59**	32
115.	*Matej*	*Kvorka*	3	GŠkolDubni	–	10	10	–	5	–	–	7	–	–	–	**31,44**	88
116.–117.	*Matouš*	*Moravec*	1	PORG PH	–	–	7	–	7	5	13	–	–	–	–	**31,11**	31
116.–117.	*Vojta*	*Staněk*	3	PORG PH	–	8	–	3	8	8	4	0	–	–	–	**31,11**	31
118.	*František*	*Couf*	4	EKO GPraha	–	–	–	–	–	–	–	–	15	15	–	**30,00**	731
119.	*Thao*	*Tranova*	1	GDomažlice	11	7	11	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,55**	30
120.	*Magdaléna*	*Bártová*	2	GDašickáPA	5	9	5	–	9	–	–	–	–	–	–	**29,50**	30
121.	*Zuzana*	*Tréglová*	4	G Žatec	13	11	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,19**	249
122.	*Viktor*	*Procházka*	3	G LPika PL	14	9	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,17**	29
123.	*Ester*	*Friedlaenderová*	4	GKepleraPH	8	8	8	0	–	–	–	–	5	–	–	**29,00**	29
124.	*Ondřej*	*Krabec*	2	G KomHavíř	12	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**28,99**	166
125.	*Barbora*	*Dohnalová*	0	GBalbínaHK	14	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**27,30**	27
126.	*Přemysl*	*Kaucký*	3	MasG Plzeň	9	7	4	–	–	6	–	0	1	–	–	**27,17**	27
127.	*Cyril*	*Škorvaga*	4	GKepleraPH	7	7	8	0	–	–	–	–	5	–	–	**27,00**	27
128.	*Anna*	*Mírková*	2	G LPika PL	17	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,38**	26
129.	*Jan*	*Bohadlo*	3	G Náchod	8	9	9	–	–	–	–	–	0	–	–	**26,34**	26
130.–133.	*David*	*Horský*	1	GHeyrovPH	15	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,27**	26
130.–133.	*Adéla*	*Krylová*	1	SGChomutov	11	10	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,27**	26
130.–133.	*Lucie*	*Kunčarová*	1	GVolgogrOS	15	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,27**	26
130.–133.	*Michal*	*Stratený*	1	GŠkolDubni	5	11	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,27**	26
134.	*Dita*	*Chabičovská*	1	GNadKavaPH	19	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	**25,31**	25
135.	*Jonáš*	*Suvák*	2	GRaymanaPV	15	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,53**	25
136.	*Dominika*	*Mokroszová*	2	G FrýdČTěš	10	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,31**	132
137.	*Adam*	*Doubrava*	1	GMasarykKM	14	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,11**	139
138.–139.	*Viktor*	*Fukala*	0	GKepleraPH	–	–	–	–	–	–	–	24	–	–	–	**23,88**	24
138.–139.	*Adam*	*Ječmínek*	0	G Česká ČB	0	10	10	–	4	–	–	–	–	–	–	**23,88**	24
140.	*Tomáš*	*Jirsa*	3	GNPražačPH	15	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**23,43**	23
141.	*Peter*	*Debnár*	1	SpojenáŠ	8	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**23,37**	23
142.	*David*	*Beinhauer*	2	MendelG OP	–	–	–	–	–	5	18	–	–	–	–	**23,04**	23

143.	*Tomáš*	*Dolák*	4	GNovéStraš	11	6	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,56**	34
144.	*Petra*	*Melicharová*	2	GDomažlice	13	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,48**	22
145.	*Filip*	*Brunclík*	3	GNPražačPH	13	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,47**	21
146.	*Marek*	*Heide*	1	GJatečníÚL	11	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,38**	21
147.	*Tomáš*	*Ježo*	2	GJHroncaBA	–	14	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,81**	21
148.	*Marek*	*Černoch*	1	G ValMez	21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,67**	21
149.	*Tereza*	*Žmolová*	1	GHeyrovPH	14	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,60**	21
150.	*David*	*Ha*	2	MasG Plzeň	12	7	–	–	–	–	2	–	–	–	–	**20,56**	21
151.	*Šimon*	*Chvátil*	2	GBNěmcovHK	–	–	–	–	20	–	–	–	–	–	–	**20,24**	161
152.	*Karolína*	*Seďová*	0	ZSDolBoj	–	10	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,22**	20
153.	*Jan*	*Šrejbr*	1	GJungmanLT	15	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,78**	20
154.	*Martina*	*Hofmanová*	2	G Mělník	9	9	–	–	0	–	–	–	–	–	–	**18,96**	19
155.	*Veronika*	*Zámečníková*	2	GBalbínaHK	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,59**	19
156.	*Lenka*	*Tomanová*	1	G VelMeziř	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,52**	19
157.	*Anna*	*Švarcová*	1	G Prachati	5	–	7	–	7	0	–	0	–	–	–	**18,47**	18
158.	*Hana*	*Jirovská*	3	NPorg	4	8	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,04**	71
159.–160.	*Michal*	*Jireš*	2	GRychnovKn	–	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
159.–160.	*Filip*	*Vosáhlo*	2	WaldPHa	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
161.	*Erik*	*Kočandrle*	2	GMikul23PL	–	11	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,73**	92
162.	*Daniela*	*Holubová*	1	GMikul23PL	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,70**	18
163.	*Jakub*	*Hemala*	2	G Zastávka	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,90**	17
164.	*Markéta*	*Petrtýlová*	1	GSRandyJN	7	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,79**	17
165.	*František*	*Szczepanik*	1	BiskG Brno	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,59**	17
166.	*Štefan*	*Hollán*	3	G Bytča	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,36**	16
167.–168.	*Matúš*	*Galba*	4	GHodžuLM	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,00**	16
167.–168.	*Matěj*	*Žáček*	4	GJarošeBO	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,00**	16
169.	*Antonín*	*Štrpka*	2	G Šumperk	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,83**	42
170.	*Vladimír*	*Lukačko*	3	GVarŽilina	7	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,76**	107
171.	*Anežka*	*Novotná*	1	GJeronýmLI	7	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,27**	15
172.	*Viktor*	*Materna*	1	GJarošeBO	10	–	–	–	–	–	–	5	–	–	–	**15,13**	15
173.	*Karel*	*Müller*	2	GMikul23PL	–	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,05**	15
174.–176.	*Alina*	*Mojšová*	1	GNVPlániPH	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
174.–176.	*Eliška*	*Schůtová*	1	GNZatlanPH	–	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
174.–176.	*Samuel*	*Soukup*	1	ArcibisGPH	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
177.	*Kateřina*	*Mannlová*	3	VOŠp SPgŠ	7	8	0	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,79**	15
178.	*Michaela*	*Bobeničová*	2	GPošKošice	5	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,75**	15
179.	*Alžběta*	*Manová*	2	G UherBrod	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,65**	75
180.	*Johana*	*Dvořáková*	2	G Trutnov	8	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,64**	39
181.	*Jaromír*	*Mielec*	4	GVolgogrOS	8	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,44**	535
182.	*Martin*	*Števko*	2	GAlejKošic	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,14**	149
183.	*Barbora*	*Lišková*	4	GJPekařeMB	3	7	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,96**	93
184.	*Šárka*	*Míchalová*	2	G Kralupy	7	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,52**	14
185.	*Michal*	*Kasarda*	3	G Stropkov	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,47**	13
186.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	8	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,14**	59
187.–189.	*Ondřej*	*Gonzor*	0	G Brandýs	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
187.–189.	*Kateřina*	*Ševčíková*	0	ZSSLOUP	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
187.–189.	*Matěj*	*Široký*	0	ZšSmrž	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
190.–191.	*Tomáš*	*Bajer*	1	SPŠstJG	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
190.–191.	*Jakub*	*Ucháč*	1	ZŠVranéNVl	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
192.	*Jana Viktória*	*Kováčiková*	3	GŠkolDubni	4	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,23**	12
193.	*Vojtěch*	*Jílek*	4	VOŠKutHora	8	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,95**	62
194.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	0	PORG PH	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,66**	12

195.	*Martin*	*Simet*	2	GMikul23PL	–	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,63**	50
196.	*Filip*	*Geib*	3	GHodžuLM	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
197.–199.	*Barbora*	*Česalová*	1	GJarošeBO	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
197.–199.	*Marie*	*Kalousková*	1	GNadAlejPH	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
197.–199.	*Marek*	*Otruba*	1	GZborovPH	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
200.–201.	*Tereza*	*Pavlišová*	2	GTomkovaOL	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
200.–201.	*Martin*	*Putzer*	2	G Jírov ČB	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
202.	*Michal*	*Pisca*	4	DievčenOŠ	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
203.	*Matěj*	*Holubička*	1	G Hořice	–	–	–	–	–	–	7	3	–	–	–	**9,54**	10
204.	*Václav*	*Prosser*	2	GMikul23PL	–	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
205.	*Tomáš*	*Pishovaký*	2	RGZS Prost	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,36**	27
206.	*Matthew*	*Dupraz*	2	NPorg	–	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,33**	31
207.	*Duc Long*	*Hoang*	2	GMikul23PL	–	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,27**	40
208.	*Michaela*	*Šedová*	3	GŽidlochov	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
209.–211.	*Nikita Edward*	*Carulkov*	4	GMHS	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,00**	9
209.–211.	*Kateřina*	*Fuková*	4	GOhradníPH	6	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,00**	9
209.–211.	*Barbora*	*Schererová*	4	GB Sučany	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,00**	9
212.–214.	*Ján*	*Kršiak*	1	GTim Lučen	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
212.–214.	*Stanislav*	*Kvirenc*	1	G Dobruška	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
212.–214.	*Bronislav*	*Theuer*	1	G Žatec	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
215.	*Tomáš*	*Svoboda*	3	G Třinec	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,46**	8
216.	*Aneta*	*Haderová*	3	VOŠp SPgŠ	7	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,26**	8
217.–219.	*Peter*	*Brezina*	2	SPŠNitra	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
217.–219.	*Tereza*	*Kinská*	2	GBNěmcovHK	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
217.–219.	*Hana*	*Tomanová*	2	GHeyrovPH	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
220.–222.	*Lukáš*	*Račko*	3	GLettMart	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
220.–222.	*Jana*	*Staňová*	3	GŠkolDubni	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
220.–222.	*Matúš*	*Varhaník*	3	G Bytča	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
223.	*Alexander*	*Csizmár*	2	GMikul23PL	–	–	8	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,96**	41
224.	*Laura*	*Špaková*	2	G Kežmarok	2	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,18**	7
225.–227.	*Alice*	*Janáčková*	1	G Chotěboř	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
225.–227.	*Adam*	*Vavrečka*	1	GBezručeFM	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
225.–227.	*Václav*	*Zvoníček*	1	GJarošeBO	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
228.–230.	*Denisa*	*Jandová*	2	GMikul23PL	–	–	7	–	0	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
228.–230.	*Tomáš*	*Sládek*	2	SŠNvh	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
228.–230.	*Linh Giang*	*Tran*	2	GMikul23PL	–	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
231.	*Karolína*	*Tulingerová*	2	AkademG PH	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,72**	15
232.	*Vojtěch*	*Lengál*	3	GZborovPH	–	–	–	–	–	–	–	–	6	–	–	**5,62**	150
233.	*Dominik*	*Bartošek*	3	SŠŽivSokol	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
234.–235.	*Jan*	*Česnek*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
234.–235.	*Aneta*	*Titzová*	2	GJarošeBO	5	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
236.	*Ha Mi*	*Dao*	2	GŠmejkalÚL	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,13**	32
237.	*Vladimír*	*Kelbl*	4	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
238.–239.	*Jiří*	*Janoušek*	1	GBudějovPH	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,89**	5
238.–239.	*Petra*	*Šimonovská*	1	OA Dušní	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,89**	5
240.	*Jakub*	*Horyna*	4	GNVPlániPH	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,83**	22
241.	*Patrik*	*Beliansky*	3	SŠNvh	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,23**	4
242.	*Michal*	*Rickwood*	3	G ČTřebová	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,21**	9
243.–244.	*Markéta*	*Machalová*	4	WichtG OS	3	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
243.–244.	*Monika*	*Matoušková*	4	G MasNámTŘ	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
245.–246.	*Lukáš*	*Antoš*	0	G Mělník	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,66**	4
245.–246.	*Anna*	*Tritschlerová*	0	GCON ČesBuď	0	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,66**	4

247.	*Marika*	*Šejblová*	3	VOŠp SPgŠ	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,88**	3
248.–249.	*Kateřina*	*Malcánková*	2	GJarošeBO	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,91**	2
248.–249.	*Monika*	*Suchá*	2	GMikul23PL	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,91**	2
250.	*Miroslav*	*Beláčik*	3	SpojenáŠ	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	**1,47**	1
251.–257.	*Iveta*	*Drašarová*	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	–	–	–	–	0	–	–	**0,00**	0
251.–257.	*Michaela*	*Holcová*	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	–	–	–	–	0	–	–	**0,00**	0
251.–257.	*Anna*	*Jandová*	2	G Leg PB	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	40
251.–257.	*Tomáš*	*Konečný*	4	GJirsíkaČB	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	**0,00**	456
251.–257.	*Filip*	*Kubálek*	1	GNeumannŽR	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
251.–257.	*Milan*	*Šaržík*	3	G Púchov	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
251.–257.	*Petra*	*Vávrová*	3	VOŠp SPgŠ	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*