Prázdniny

1. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ŘÍJNA 2016

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Při potápění v Karibiku objevilo PraSátko poklad – tři zavřené truhly s cedulkami *zlaté mince*, *diamanty* a *zlaté mince a diamanty*. Jak ale praví legenda, žádná cedulka není umístěna správně. Pomozte PraSátku cedulky opravit, smíte-li z právě jedné truhly vytáhnout jeden kus pokladu bez dívání se dovnitř.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Rado byl na dovolené v Rovině. Jednoho večera se pohádal se svou prázdninovou láskou Sofií. A protože Rado všechno řeší fatalisticky, začal vztekle kreslit přímky mezi sebe a Sofii a křičet: „Opovaž se někdy překročit tuhle přímku! Ty budeš na své straně a já zas na své.“ Dokažte, že až se Rado uklidní, může od Sofie důstojně odejít libovolně daleko a nepřekročit přitom žádnou z nakreslených přímek.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Orgové na devíti kánoích sjížděli Vltavu z Vyššího Brodu do Krumlova. Jako vždy měli všichni zpoždění, a proto každá posádka vyjela v jiný čas. Kánoe celou dobu udržovaly konstantní rychlost, nicméně ne nutně všechny stejnou, a tak se občas předjížděly. Dokažte, že nemohla každá z posádek cestou potkat právě čtyři jiné posádky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

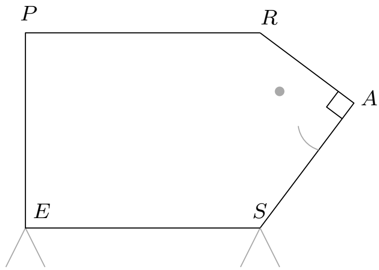
Pepa si na prázdniny od Štěpána půjčil jeho chloubu – tři 2016ciferná čísla, jejichž desítkové zápisy neobsahují nuly a liší se od sebe jen pořadím cifer, přičemž třetí číslo je součtem prvních dvou. Protože je ale Pepa roztržitý, tak ta čísla někde ztratil. Pomozte Pepovi nějakou takovou trojici čísel najít.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Marta našla na chalupě pastelky, a tak obarvila všechna přirozená čísla – každé buď červeně, nebo zeleně. Potom si všimla, že každou z obou barev použila alespoň jednou, součet dvou různobarevných čísel je vždy zelený a součin dvou různobarevných čísel je vždy červený. Ukažte, že součet a součin libovolných dvou červených čísel musí být červený.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Matěj měl o prázdninách narozeniny! Dostal k nim dort ve tvaru PraSátka – tj. pětiúhelníka $PRASE$ takového, že $PRSE$ je obdélník a RAS je (ne nutně rovnoramenný) pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u A. Povšiml si, že obsah celého dortu je roven $|PR|^2$. Pak si ale uvědomil, že být o rok blíže smrti není vůbec šťastná událost a že do ní nechce PraSátko tahat, a proto se rozhodl předělat dort do nudnějšího čtvercového tvaru. Ukažte, že umí dvěma rovnými řezy rozdělit pětiúhelník na tři díly tak, že bude možné je přeskládat na čtverec (dílky je možné posouvat, otáčet, a protože je to odolný dort, tak dokonce i překlápět).



Úloha 7. (5 bodů)

PraSe se rozhodlo expandovat do zahraničí a jako první cíl si vybralo Flatlandii. Organizátoři chtěli začít masivní billboardovou kampaní. Vypočítali, že nejefektivnější by bylo postavit billboardy přesně do středu spojnice každých dvou obcí (které považujeme za body). Na to by jim ale nestačil rozpočet, a proto obce přesunuli tak, aby se žádné dvě nepřekrývaly a billboardů bylo potřeba co nejméně. Kolik jich nakonec vylepili, pokud se ve Flatlandii nachází právě n obcí?

Úloha 8. (5 bodů)

Tonda byl o prázdninách ve Vietnamu na návštěvě ve své rodné vesnici. Ta má tvar čtverce o straně délky dva kilometry, je v ní n bodových domů a v každém z nich bydlí jeden člověk. Ve 12:00 se Tonda začal sám doma nudit a rozhodl se, že v 19:00 uspořádá velikou party. Ihned se proto vydal obcházet svoje sousedy s pozváním. Jakmile některý z obyvatel vesnice informaci dostal, šel ji šířit mezi ostatní, kteří zatím odpočívali ve svých domovech, dokud se k nim informace nedonesla. Pokud všichni Vietnamci chodí rychlostí 3 km/h, rozhodněte, zda mohli nezávisle na n a rozmístění domů spolupracovat tak, aby se všech n obyvatel vesnice sešlo v 19:00 u Tondy doma.

Prázdniny

1. podzimní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Při potápění v Karibiku objevilo PraSátko poklad – tři zavřené truhly s cedulkami zlaté mince, diamanty a zlaté mince a diamanty. Jak ale praví legenda, žádná cedulka není umístěna správně. Pomozte PraSátku cedulky opravit, smíte-li z právě jedné truhly vytáhnout jeden kus pokladu bez dívání se dovnitř.

(Matěj Konečný)

Řešení:

PraSátko začne tak, že vytiahne jeden kus pokladu z truhlice s nápisom *zlaté mince a diamanty*. Z tejto truhlice vytiahne diamant alebo zlato. Keďže vie, že v tejto truhlici nebudú oba predmety naraz (lebo ceduľka musí klamať), tak predmet, ktorý vytiahne, musí byť aj skutočný názov truhlice. Teda ak vytiahne diamant, musia tam byť iba diamanty, a ak zlato, tak zlato.

Ak je v truhlici, z ktorej ťahalo, zlato, potom čo bude v truhlici s ceduľkou *diamanty*? Nemôžu tam byť diamanty (lebo ceduľka musí klamať) a ani zlato (pretože to je už v inej truhlici). Ostáva mu teda, že tam bude zlato a diamanty. No a na poslednú truhlicu mu už ostali diamanty.

Rovnako to bude, ak vytiahne diamant. V truhle s ceduľkou *zlaté mince* budú zlaté mince a diamanty a v poslednej truhlici budú zlaté mince.

Poznámky:

Vačšine nerobil príklad problém, jedine pár chýb bolo, ak si riešitelia zle prečítali zadanie a mysleli si, že môžu ťahať z každej truhlice.

(Juraj Bodík)

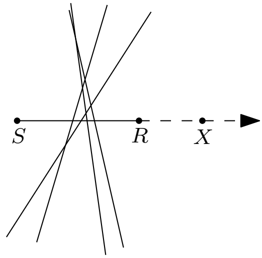
Úloha 2.

Rado byl na dovolené v Rovině. Jednoho večera se pohádal se svou prázdninovou láskou Sofií. A protože Rado všechno řeší fatalisticky, začal vztekle kreslit přímky mezi sebe a Sofii a křičet: „Opovaž se někdy překročit tuhle přímku! Ty budeš na své straně a já zas na své.“ Dokažte, že až se Rado uklidní, může od Sofie důstojně odejít libovolně daleko a nepřekročit přitom žádnou z nakreslených přímek.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Označme bodem R Rada a bodem S Sofii. Protože Rado kreslil přímky mezi sebe a Sofii, všechny jeho přímky protnuly přímku SR na úsečce SR (mimo její koncové body). Označme X bod na polopřímce $\overrightarrow{SR}$, který neleží na úsečce SR. Protože dvě různoběžné přímky v rovině mají nejvýše jeden průsečík, může Rado odejít libovolně daleko po polopřímce $\overrightarrow{RX}$ a nepřekročit při tom žádnou přímku.



Poznámky:
Řešení se sešla spousta a většina z nich byla správná. Nejvíce řešitelů dokazovalo úlohu vložením pomocné přímky SR, po které může Rado důstojně odkráčet. Jiní předpokládali, že existuje mnohoúhelník, který Rada ohraničuje, a poté došli ke sporu. Někteří však pouze nakreslili obrázek a řekli, že důkaz je zřejmý. Tímto však plného počtu bodů nedosáhli. Ve spoustě řešení neodcházel Rado, ale Sofie, za což jsem body samozřejmě nestrhávala. Jiným řešitelům zase vrtalo hlavou, jak je Rado schopen nakreslit přímku, když je nekonečná. *(Adéla Kostelecká)*

Úloha 3.

Orgové na devíti kánoích sjížděli Vltavu z Vyššího Brodu do Krumlova. Jako vždy měli všichni zpoždění, a proto každá posádka vyjela v jiný čas. Kánoe celou dobu udržovaly konstantní rychlost, nicméně ne nutně všechny stejnou, a tak se občas předjížděly. Dokažte, že nemohla každá z posádek cestou potkat právě čtyři jiné posádky.

(Matěj Konečný)

Řešení:
Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že každá posádka potkala právě čtyři jiné posádky. Začněme lodí, která dorazila do cíle první. Žádná loď ji nemohla v průběhu cesty předjet, neboť lodě udržují konstantní rychlost. Kdyby ji tedy nějaká loď předjela, už by před ní zůstala a námi vybraná loď by nedorazila první. Proto aby potkala čtyři jiné lodě, musela je předjet sama. Z toho vyplývá, že musela vyrazit v pořadí jako pátá.

Podobně loď, která dorazila jako poslední, musela po cestě předjet čtyři jiné lodě, protože jinak by ony samy skončily poslední. Protože doplula v pořadí devátá, musela startovat jako pátá. To ale není možné, neboť jedna loď nemůže zároveň dojet do cíle jako první a jako devátá. Dostáváme tedy spor s tím, že každá posádka potkala právě čtyři jiné.

Poznámky:
Správná řešení se dělila zpravidla na dva typy. Buďto řešitelé uvažovali lodě, co dojely jako první a jako poslední, nebo naopak lodě, co vyjely jako první a jako poslední. Druhý způsob však musel být doplněn diskusí, neboť obě dvě lodě by dojely nastejno.

Mezi nejčastější chyby patřil předpoklad, že se těch devět lodí rozdělí na dvě skupinky po pěti a po čtyřech. Další častou chybou bylo, že ačkoliv je v zadání, že orgové sjíždějí Vltavu z Vyššího Brodu do Krumlova, uvažovali řešitelé trasu jako nekonečnou a pak pracovali s tvrzením, že rychlejší loď předjede všechny pomalejší před sebou. *(Karel Vlachovský)*

Úloha 4.

Pepa si na prázdniny od Štěpána půjčil jeho chloubu – tři 2016*ciferná čísla, jejichž desítkové zápisy neobsahují nuly a liší se od sebe jen pořadím cifer, přičemž třetí číslo je součtem prvních dvou. Protože je ale Pepa roztržitý, tak ta čísla někde ztratil. Pomozte Pepovi nějakou takovou trojici čísel najít.* *(Rado Švarc)*

Řešení:
Začneme tím, že najdeme tři n-ciferná čísla vyhovující všem ostatním podmínkám zadání pro nějaké $n \mid 2016$ (n je dělitelem 2016). Pak by nám pouze stačilo napsat tato čísla $2016/n$-krát za sebe a součet prvních dvou by byl stále roven třetímu. Pokud totiž budeme čísla sčítat pod sebou, budeme je sčítat v rámci jednotlivých n-ciferných úseků, neboť na jejich rozhraních nebudeme „přecházet přes desítku“ (součet původních n-ciferných čísel byl také n-ciferný). Protože $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, máme opravdu hodně možností na volbu n. Pro $n \in \{1, 2\}$ taková čísla najít neumíme, ale už pro $n = 3$ můžeme nalézt jednu vyhovující trojici čísel $(495, 459, 954)$. Dále vyhovují například čtyřciferná čísla $(2538, 3285, 5823)$ nebo devíticiferná čísla $(123456789, 864197532, 987654321)$.

Jiné řešení:
Pokud najdeme libovolnou trojici n-ciferných čísel (pro $n \leq 2016$) vyhovující všem ostatním podmínkám, ve které při písemném sčítání alespoň jednou „přenášíme jedničku“, můžeme konstrukci dokončit také jiným způsobem. Bezprostředně vlevo od řádu, ze kterého byla jednička „přenesena“, můžeme dopsat do všech tří čísel libovolný počet devítek (tolik, aby výsledné číslo mělo 2016 cifer). Snadno pak ověříme, že vzniklá čísla stále vyhovují všem podmínkám. Takto můžeme zkonstruovat například z trojice použité v minulém řešení trojici $(4999\ldots9995, 4599\ldots9999, 9599\ldots9994)$.

Poznámky:
Většina řešitelů měla úlohu správně a za pět bodů. Nejvíce řešení postupovalo jako v prvním vzorovém řešení, konkrétních vyhovujících period se objevilo mnoho. V hodnocení jsem byl velmi mírný – často nebylo dostatečně zdůvodněno, že po zapsání čísel „za sebe“ se mezi jednotlivými úseky nebudou „převádět jedničky“. Stejně tak několikrát chybělo dostatečné odůvodnění, že $n \mid 2016$ (jinak konstrukce nefunguje). Protože zadání explicitně neříkalo, jestli se Štěpánova čísla musí lišit, uznával jsem také řešení, ve kterých se dvě z nich rovnala. Imaginární bod $+i$ si zasloužila čtveřice řešení, ve kterých byl ke konstrukci kratších n-tic použit nějaký pěkný trik – třeba desetinný zápis zlomků tvaru $i/7$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ nebo pěkný iterativní postup, který hledaná čísla sám zkonstruoval. *(Jakub Löwit)*

Úloha 5.

Marta našla na chalupě pastelky, a tak obarvila všechna přirozená čísla – každé buď červeně, nebo zeleně. Potom si všimla, že každou z obou barev použila alespoň jednou, součet dvou různobarevných čísel je vždy zelený a součin dvou různobarevných čísel je vždy červený. Ukažte, že součet a součin libovolných dvou červených čísel musí být červený. *(Rado Švarc)*

Řešení:
Nejprve ukážeme, že číslo 1 je zelené. Pro spor předpokládejme, že je červené. Zvolme si libovolné zelené číslo a označme ho z. Protože ale součin červeného čísla 1 a zeleného čísla z musí být červený, dostáváme, že číslo z je zároveň zelené a červené, což nelze.

Označme si c nejmenší červené číslo. Dokážeme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je číslo kc červené. Pokud je k zelené, pak to vyplývá z podmínky ze zadání. Pro červené k dokážeme tvrzení sporem. Nechť je pro spor kc zelené. Přičtením červeného c získáme zelené $kc + c$. Přičtením zelené 1 k červenému k získáme zelené $k + 1$. To vynásobíme červeným c a dostaneme červené $kc + c$, což je spor, a kc je tedy červené číslo pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

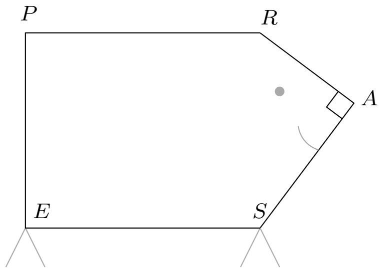
Nyní dokážeme, že všechna čísla nedělitelná c musí být zelená. Čísla menší než c jsou zelená z definice c. Všechna větší čísla nedělitelná c musí být zelená, jelikož je můžeme zapsat jako součet nejbližšího nižšího násobku čísla c (který je červený) a zeleného čísla menšího než c.
Součet a součin dvou červených čísel (tedy čísel dělitelných c) musí být dělitelný c, tudíž červený.

Poznámky:
Došlo mnoho řešení, bohužel jen malá část z nich si zasloužila plný počet bodů. Většina řešitelů se snažila najít obarvení vyhovující podmínkám v zadání. Aby byl důkaz kompletní, je potřeba najít opravdu všechna obarvení a dokázat, že žádná další neexistují. Několik řešitelů zkoušelo upravovat

vztahy mezi zelenými a červenými čísly. V tomto případě je potřeba si dát pozor na to, že tvrzení v zadání jsou implikace (nikoliv ekvivalence), a že je potřeba tvrzení dokázat pro každá dvě červená čísla. *(Lucien Šíma)*

Úloha 6.

Matěj měl o prázdninách narozeniny! Dostal k nim dort ve tvaru PraSátka – tj. pětiúhelníka $PRASE$ takového, že $PRSE$ je obdélník a RAS je (ne nutně rovnoramenný) pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u A. Povšiml si, že obsah celého dortu je roven $|PR|^2$. Pak si ale uvědomil, že být o rok blíže smrti není vůbec šťastná událost a že do ní nechce PraSátko tahat, a proto se rozhodl předělat dort do nudnějšího čtvercového tvaru. Ukažte, že umí dvěma rovnými řezy rozdělit pětiúhelník na tři díly tak, že bude možné je přeskládat na čtverec (dílky je možné posouvat, otáčet, a protože je to odolný dort, tak dokonce i překlápět).



(Rado Švarc)

Řešení (podle Danila Koževnikova):

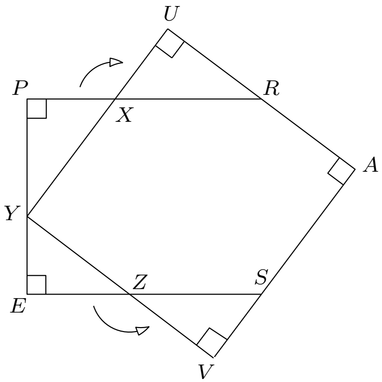
BÚNO nechť PR a ES mají délku 1 a PE a RS délku d. Očividně $0 < d < 1$. Označme si postupně jako a a b délky RA a AS. Platí $0 < a, b < 1$, protože d je délka přepony trojúhelníku RAS a a, b jsou odvěsny.

Obsah $PRSE$ je roven d a obsah RAS je roven $ab/2$. Vzhledem k tomu, že obsah celého útvaru je 1, musí platit $ab = 2 - 2d$. Pythagorova věta nám dává vztah $a^2 + b^2 = d^2$. Z ní a vztahu $ab = 2 - 2d$ získáme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = d^2 - 4d + 4 = (2 - d)^2$$

neboli $a + b = 2 - d$ (protože $a + b$ i $2 - d$ jsou kladná čísla).

Tento vztah se dá ekvivalentně přepsat na $(1 - a) + (1 - b) = d$, takže na straně PE existuje takový bod Y, že $PY = 1 - a$ a $YE = 1 - b$. Definujeme dále bod X jako průsečík strany PR a rovnoběžky s AS vedené bodem Y. Analogicky definujme bod Z jako průsečík strany ES a rovnoběžky s AR vedené bodem Y. Jako U označme průsečík YX a AR a V průsečík AS a YZ. Protože $UX \parallel AS$ a $AR \perp AS$, úhel YUA je pravý. Analogicky je i úhel YVA pravý, takže $UAVY$ je obdélník. Ukažme, že je to dokonce čtverec.



Platí $\sphericalangle XPY = 90^\circ = \sphericalangle RAS$ a $\sphericalangle PYX = \sphericalangle ASR$, protože $AS \parallel XY$ a $RS \parallel PY$. Trojúhelníky XPY a RAS jsou proto podobné z věty *uu*. Úhel XUR je pravý a $\sphericalangle UXR = \sphericalangle PXY$. Odtud pomocí věty *uu* aplikované na $\triangle XPY$ a $\triangle XUR$ dostáváme, že $\sphericalangle PYX = \sphericalangle XRU$. Nyní ukážeme, že trojúhelníky PXY a UXR jsou dokonce shodné podle věty *usu*.

K tomu nám stačí ukázat, že platí $XY = XR$. Z výše zmíněné podobnosti $\triangle XPY$ a $\triangle RAS$ a ze vztahu $PY = 1 - a$ plyne $PX = a(1-a)/b$, $XY = d(1-a)/b$ a $XR = 1 - PX = 1 - a(1-a)/b$. Dokazovaná rovnost je tedy ekvivalentní s

$$1 - \frac{a(1-a)}{b} = \frac{d(1-a)}{b},$$

což po roznásobení a vynásobení b vyjde jako $b - a + a^2 = d - ad$. Víme, že platí $d = 2 - a - b$, z čehož po dosazení dostáváme $a^2 - a + b = 2 - a - b - 2a + a^2 + ab$ neboli $ab = 2a + 2b - 2 = 2 - 2d$, což platí. Všechny úpravy byly ekvivalentní, takže jsme prokázali platnost $XY = XR$. Trojúhelníky PYX a UXR jsou tedy shodné. Z toho vyplývá $UR = PY = 1 - a$ a tedy $UA = 1$. Zcela obdobně dokážeme, že $AV = 1$. To znamená, že $AVYU$ je čtverec o stranách délky 1.

Teď už je řešení vidět na první pohled. Vedeme řezy přímkami XY a YZ, čímž $PRASE$ rozdělíme na 3 díly. Čtverec poskládáme tak, že umístíme $\triangle PYX$ na místo dokresleného $\triangle URX$ a $\triangle EYZ$ na místo $\triangle SVZ$. Díky shodnosti těchto dvojic trojúhelníků tak z pětiúhelníku PRASE vytvoříme jednotkový čtverec $AVYU$, čímž je úloha vyřešena.

Poznámky:

Dortové úlohy mám moc rád, jelikož jsou ukrutně sladké. Úloha šla řešit několika různými, stejně správnými postupy. Za správnou úvahu, jakým směrem by se řešení mělo ubírat, často prezentovanou skrze obrázek, jsem dával jeden bod a to byl také bohužel často jediný bod, který řešitelé za své řešení obdrželi. Při řešení podobných úloh v budoucnu je třeba si pečlivě rozmyslet, co všechno je nutné ukázat, následně vyslovit tvrzení a všechna nezřejmá tvrzení podložit důkazem.

Sešlo se také několik opravdu hezkých řešení jak analytických, tak diskuzí. Nakonec se mi také do rukou dostalo pár řešení psaných na poslední chvíli, což se podepsalo na jejich kvalitě. Dovolím si tedy doporučit sepisovat úlohy zavčas. *(Víťa Kalisz)*

Úloha 7.

PraSe se rozhodlo expandovat do zahraničí a jako první cíl si vybralo Flatlandii. Organizátoři chtěli začít masivní billboardovou kampaní. Vypočítali, že nejefektivnější by bylo postavit billboardy přesně do středu spojnice každých dvou obcí (které považujeme za body). Na to by jim ale nestačil rozpočet, a proto obce přesunuli tak, aby se žádné dvě nepřekrývaly a billboardů bylo potřeba co nejméně. Kolik jich nakonec vylepili, pokud se ve Flatlandii nachází právě n obcí?

(Rado Švarc)

Řešení:

Uvažujme libovolnou vyhovující množinu n obcí a jim příslušných billboardů v rovině. Dále si vezměme nějakou přímku, která není kolmá na žádnou ze spojnic dvou obcí. Tato podmínka nám zakazuje pouze konečně mnoho směrů, kdežto my si svou hledanou přímku můžeme zvolit nekonečně mnoha směry. Vždy tedy takovou přímku najít umíme. Nyní uvažme kolmý průmět všech obcí i billboardů na tuto námi vybranou přímku.

Žádné dva obrazy obcí na této přímce nemohou splývat, je jich tedy stále n. Pokud jsme v rovině měli jejich vyhovující rozmístění, pak je vyhovující i nové rozmístění na přímce – to lze snadno nahlédnout z toho, že byl-li billboard středem dvojice obcí, pak nutně musí být středem té samé dvojice obcí i na přímce po provedení kolmého průmětu. Vidíme, že jsme tedy buď zachovali, nebo zmenšili počet billboardů (některé mohly splynout). To znamená, že máme-li libovolné vyhovující řešení v rovině, pak toto rozmístění můžeme převést na vyhovující rozmístění na přímce a buď zachovat počet billboardů, nebo jej dokonce zmenšit. Existuje-li tedy řešení s nejmenším počtem billboardů, určitě jej lze dosáhnout se všemi obcemi na přímce.

Uvažujme proto libovolných n obcí na přímce (z nichž žádné dvě nesplývají) a označme je postupně a_1 až a_n podle jejich pořadí na této přímce, přičemž ještě přidáme počátek souřadnicové soustavy O před první obec. Nyní můžeme obce porovnávat podle vzdálenosti od tohoto počátku (např. obec $a_2 <$ obec a_3). Definujme $S(a_i, a_j)$ jako střed dvojice vesnic a_i a a_j. Uvažujme body $S(a_1, a_2), S(a_1, a_3), \ldots, S(a_1, a_n)$ a $S(a_2, a_n), S(a_3, a_n), \ldots, S(a_{n-1}, a_n)$. Platí následující uspořádání:

$$S(a_1, a_2) < S(a_1, a_3) < \cdots < S(a_1, a_n) < S(a_2, a_n) < S(a_3, a_n) < \cdots < S(a_{n-1}, a_n).$$

Vidíme, že pro libovolných n vesnic na přímce máme těchto $2n - 3$ určitě různých středů některých spojnic dvou vesnic. Protože tyto středy vzhledem k ostrému seřazení nemohou nikdy splynout, musíme určitě využít alespoň $2n - 3$ billboardů. Kdybychom jich měli méně, tak by na jednom z těchto bodů chyběl billboard a rozmístění by nebylo vyhovující.

Rozložíme-li obce na jednu přímku tak, že mezi každými dvěma sousedními budou stejné vzdálenosti, bude postačovat $2n-3$ billboardů, které umístíme mezi každé dvě sousední obce a do každé obce kromě obou krajních. Když přiřadíme i-té obci x-ovou souřadnici $2i$ a takto je umístíme na číselnou osu, dáme billboardy přesně na čísla 3, 4, … , $2n - 2$, $2n - 1$. Pokud si nyní vezmeme libovolné dvě různé obce i a j, pak je jejich střed (tedy průměr jejich souřadnic) v bodě $(2i+2j)/2$, neboli v bodě s celočíselnou souřadnicí $i + j$. Jelikož $3 \leq i + j \leq 2n - 1$, tak takový bod zřejmě splývá s nějakým billboardem, který jsme už umístili.

Ukázali jsme tedy, že umíme dosáhnout počtu $2n-3$ billboardů, a zároveň také to, že jich méně než $2n - 3$ být nemůže. Jedná se proto o hledaný minimální počet billboardů pro správné rozjetí kampaně!

Poznámky:

Spousta řešitelů měla problém se správným chápáním stavění billboardů do „středu spojnice každých dvou obcí“. Znamená to, že ať nám nepřítel vybere jakékoliv dvě obce, tak mu musíme ukázat, že jsme do středu jejich spojnice postavili billboard. Hodně řešitelů přišlo na správnou konstrukci obcí na přímce, při které lze docílit počtu $2n - 3$ billboardů. K úplnému důkazu je však ještě třeba ukázat, že neexistuje konstrukce, kde by jich bylo méně ;)

Většina správných řešení byla více méně podle vzorového. Imaginární bod si vysloužili *Josef Minařík* a *Lucie Kundratová* za cool využití konvexního obalu a *Ondřej Svoboda* za řešení pomocí extremálního prvku.

(Marian Poljak)

Úloha 8.

Tonda byl o prázdninách ve Vietnamu na návštěvě ve své rodné vesnici. Ta má tvar čtverce o straně délky dva kilometry, je v ní n bodových domů a v každém z nich bydlí jeden člověk. Ve 12:00 se Tonda začal sám doma nudit a rozhodl se, že v 19:00 uspořádá velikou party. Ihned se proto vydal obcházet svoje sousedy s pozváním. Jakmile některý z obyvatel vesnice informaci dostal, šel ji šířit mezi ostatní, kteří zatím odpočívali ve svých domovech, dokud se k nim informace nedonesla. Pokud všichni Vietnamci chodí rychlostí 3 km/h, rozhodněte, zda mohli nezávisle na n a rozmístění domů spolupracovat tak, aby se všech n obyvatel vesnice sešlo v 19:00 u Tondy doma.

(Anh Dung „Tonda" Le)

Řešení:

Ano, stihnout to mohli, a to dokonce s nemalou rezervou.

Pro jednoduchost předpokládejme, že žádné dva domy nesplývají. Pokud by tomu tak někde nebylo, tak všem obyvatelům v tomto bodě určíme, že vždy budou chodit spolu, i když bychom je mohli poslat do více různých směrů.

Jelikož je bodů jen konečně mnoho, je konečně mnoho i vzdáleností mezi dvojicemi domů. Z předpokladu dále víme, že všechny vzdálenosti mezi domy jsou kladné. Vezměme tedy nejmenší z těchto vzdáleností a označme ji d. Pro toto d najděme nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$d > \frac{2\sqrt{2}}{2^k}\text{km}.$$

Víme, že nejdelší úsečka ve čtverci o straně a je jeho úhlopříčka, ta má délku $\sqrt{2}a$. Pokud tedy rozdělíme vesnici na $2^k \times 2^k$ shodných čtverečků, bude v každém čtverečku nejvýše jeden dům. (Každé dva domy jsou od sebe dále, než je délka úhlopříčky, což je největší možná vzdálenost v těchto čtverečcích.) Informovaní vesničané mohou postupovat následovně:

(1) Pokud ve tvém čtverci (na začátku máme čtvercovou vesnici, kterou pak rozdělujeme na menší čtverečky) existuje nejvýše jeden neinformovaný vesničan, navštiv ho (existuje-li) a jděte k Tondovi domů.

(2) Pokud ve tvém čtverci existují dva či tři neinformovaní vesničané, nejdřív dojdi k jednomu z nich a pak spolu dojděte ke zbylému (zbývá-li jeden), nebo každý dojděte k jednomu ze zbylých (zbývají-li dva). Následně jděte také k Tondovi domů.

(3) Pokud ve tvém čtverci existují více než tři neinformovaní vesničané, nejprve zvol libovolné tři z nich a pak podobně jako v předchozím případě nejprve dojdi za jedním z nich a následně se každý vydejte za jedním ze zbylých dvou. Nakonec si rozdělte čtverec na čtyři čtverečky o poloviční délce strany a každý se přesuňte do svého nového čtverečku.

Víme, že těchto podrozdělení provede každý vesničan nejvýše k, neboť poté v jeho čtverečku už nemůže být více než jeden neinformovaný vesničan. Odhadněme tedy, za jakou maximální dobu se tímto způsobem všichni vesničané o párty dozví:

Pokud má čtverec nějakého vesničana stranu délky a, pro navštívení prvního neinformovaného vesničana bude muset ujít nejvýše $\sqrt{2}a < \frac{3}{2}a$ km (přes celou úhlopříčku). Pro navštívení zbylých dvou opět každému z vesničanů stačí ujít nanejvýš tuto délku. Nakonec přechod do nového čtverečku (toho, ve kterém bude vesničan opakovat proces „v příštím kole") můžeme odhadnout také touto délkou.

Během jedné fáze tedy každý z vesničanů ujde nejvýše $3 \cdot \frac{3}{2}a$ km, tj. stihne ji do

$$\frac{3 \cdot \frac{3}{2}a}{3} = \frac{3}{2}a$$

hodin. Pokud se podíváme na posloupnost délek stran čtverečků v jednotlivých fázích (v první fázi je čtverečkem celá vesnice a informovaný vesničan je jen Tonda), zjistíme, že tvoří část z geometrické posloupnosti

$$\left(\frac{2}{2^i}\text{km}\right)_{i=0}^{\infty}.$$

Sečteme-li tuto posloupnost, dostaneme

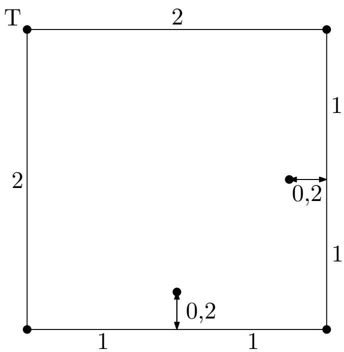
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{2}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} = 4,$$

a tudíž celkový čas, za který budou všichni vesničané informováni, je nejvýše

$$4\frac{3}{2} = 6$$

hodin. Nesmíme však zapomenout na cestu k Tondovi; ta je ovšem dlouhá nejvýše $2\sqrt{2} < 3$ km, což do zbývající hodiny všichni ujít stihnou.

Poznámky:
Úloha byla trochu zjednodušena vysokou časovou rezervou (i v tomto řešení jsme používali zbytečně hrubé odhady, a přesto jsme se do sedmi hodin vešli), což mnoho řešitelů přimělo k sepsání řešení typu „to přeci musejí stihnout“, za což jsem bohužel body udělovat nemohl. Tato řešení měla obvykle vyřešený nějaký speciální případ (často domy uspořádané do mřížky) s tím, že o moc horší rozmístění neexistuje, nebo přímo tvrdila, že dané rozmístění již nejhorší je. Tak tomu ovšem není, dobrým protipříkladem je toto rozmístění šesti domů (včetně Tondova):



Při tomto rozmístění není možné párty uspořádat do

$$\frac{2\sqrt{2} + 2 + 2}{3} \doteq 2{,}28$$

hodin (což je hodnota, která stačí pro libovolnou podmnožinu pravidelné mřížky 3×3), neboť rozebráním případů zjistíme, že nejrychleji to lze až po

$$\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 0{,}04} + 2}{3} \doteq 2{,}29$$

hodinách. To je sice minimální rozdíl (rozložení domů se příliš neliší od umístění jen na okraj vesnice), nicméně jako funkční protipříklad to stačí.

Bonusové $+i$ si vysloužil *Václav Volhejn*, který použil a elegantně dokázal odlišnou konstrukci dělením vesnice na pruhy. Ta umožňuje dostat všechny vesničany k Tondovi za méně než 4 hodiny. Pokud toto řešení ještě vylepšíme přesnějšími odhady, lze ukázat, že pro libovolné n a rozmístění domů by stačily dokonce jen 3 hodiny a 10 minut, tudíž párty může začít už chvíli po 15. hodině!

(Tomáš Novotný)