7. série

Racionální a iracionální čísla, nerovnosti

1. ÚLOHA
Nechť n je přirozené číslo a $m = 2\sqrt{28n^2 + 1} + 2$. Je-li m přirozené číslo, pak je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte.

2. ÚLOHA
Nechť n je přirozené číslo. Určete maximální hodnotu, kterou může nabývat výraz $(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2 + (a_n - a_1)^2$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $0 \leq a_i \leq 1$. Pro které n-tice se toto maximum nabývá?

3. ÚLOHA
Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo m tak, že $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$.

4. ÚLOHA
Nechť $x_1, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla taková, že $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Označme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max\left(\frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\right).$$

Pro kterou n-tici $x_1, \ldots, x_n$ je $f(x_1, \ldots, x_n)$ nejmenší?

5. ÚLOHA
Nechť d je přirozené číslo a nechť $\sqrt{d}$ i $\sqrt{d+1}$ jsou iracionální. Dokažte: pro libovolná přirozená čísla a, b platí

$$b^2 \left| \sqrt{d} - \frac{a}{b} \right| > \sqrt{d+1} - \sqrt{d}.$$