4. série
Diskrétní úlohy

1. ÚLOHA
V rovině je dán konečný počet bodů. Dokažte, že mezi nimi existuje bod, který má mezi ostatními nejvýše tři k němu nejbližší (stejně vzdálené) body.

2. ÚLOHA
Mějme dán konvexní mnohostěn, jehož hrany jsou šipky. Víme, že z každého vrcholu vychází a do každého vchází alespoň jedna šipka. Dokažte, že existují alespoň dvě stěny, které je možno obejít ve směru šipek kolem dokola.

3. ÚLOHA
Na automobilovém okruhu jsou rozmístěny kanystry s benzínem. Benzín je ve všech kanystrech dohromady postačuje právě k ujetí jednoho okruhu. Dokažte, že můžeme s prázdnou nádrží začít jízdu u některého kanystru tak, abychom objeli celý okruh v předepsaném směru.

4. ÚLOHA
V rovině jsou dány tři různé směry. Určete nejmenší přirozené číslo n, aby existovalo n přímek, z nichž každá má jeden z daných směrů, které dělí rovinu na alespoň 1988 částí.

5. ÚLOHA
Kruh je rozdělen na n výsečí ($n \geq 3$). V každé z nich je jeden hrací kámen. Provést tah znamená přemístit libovolné dva kameny do sousedních výsečí tak, aby se při tom pohybovaly opačným směrem (jeden po směmu a jeden proti směru hodinových ručiček). Je možno opakováním těchto tahů dosáhnout situace, kdy všechny kameny jsou v téže výseči? Závisí odpověď na čísle n?

Řešení 4. série

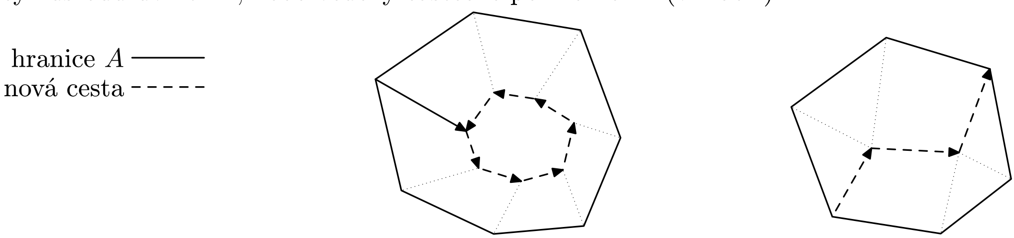
1. ÚLOHA

Jestliže je dáno konečně bodů, pak i vzdáleností mezi nimi je konečně. Vybereme z nich tu nejkratší a z původní množiny bodů ty body, které mají alespoň od jednoho bodu tuto vzdálenost. Vybranou množinu označme A, vybranou vzdálenost d. Z množiny A vybereme libovolný bod X a k němu takový bod Y, aby v kruhu k o středu X a poloměru $|XY|$ ležely všechny body množiny A. Nyní dokážeme sporem, že Y má v A nejvýše tři k sobě nejbližší body. Nechť má Y v A čtyři nejbližší body. Tyto body mají vzájemné vzdálenosti aspoň d, nemohou tedy ležet v kruhu k, což je spor. Tedy Y má v A nejvýše tři nejbližší body. Vzhledem k tomu, že tyto body jsou od Y vzdáleny d a každý bod z původní množiny, který je od Y vzdálený d je také v A, je zřejmé, že Y má nejvýše tři nejbližší body i v původně zadané množině.

2. ÚLOHA

Zvolme si libovolný bod a vyjděme z něj po hraně ve směru šipky. Po chvíli dojdeme do dalšího bodu a z něj budeme opět pokračovat po hraně ve směru šipky. V okamžiku, kdy dojdeme do místa, kde už jsme jednou byli, se zastavíme. K tomu musí dojít, neboť bodů je konečně. Tím jsme získali na mnohostěnu cyklus, který je možno obejít ve směru šipek. Tento cyklus rozděluje povrch mnohostěnu na dvě části. Toto tvrzení je sice „vidět“, ale jeho korektní důkaz není jednoduchý, a proto jsme ho nevyžadovali. (Jedná se o speciální případ Jordanovy věty. Neplatí např. pro mnohostěny s „dírou“.) Dokážeme nyní, že v každé části povrchu (po rozdělení cyklem) existuje stěna, kterou lze obejít ve směru šipek. Vezměme jednu z částí povrchu, vzniklých rozdělením a označme ji A. Je-li to stěna, pak je důkaz hotov. Není-li to stěna, pak nekde na hranici A existuje vrchol, ze kterého vede hrana směrem do A.

a) Nechť má hrana šipku dovnitř. Pak po ní půjdeme podobně jako na začátku s tím rozdílem, že se zastavíme buď na místě, kde jsme už šli nebo v bodě z cyklu. Tím získáme cyklus buď uvnitř A, nebo vedený částečně po hranici A (viz obr.).



b) Hrana má šipku ven. Pak otočíme všechny šipky na opačné a provedeme bod a): dostaneme cyklus uvnitř (či po hranici) A. Pak provedeme opět převod šipek na opačné. Nalezený cyklus zůstane, jen se změní směr obíhání. V každém z případů najdeme uvnitř A cyklus menší (je součástí A). Po konečné počtu kroků najdeme v A cyklus kolem jedné stěny a to jsme chtěli dokázat.

3. ÚLOHA

Úlohu dokážeme matematickou indukcí podle počtu kanystrů.

a) 1 kanystr — začneme jízdu u něj, b) Nechť pro n kanystrů věta platí. Mějme $n+1$ kanystrů. Pak mezi nimi existuje alespoň jeden, od kterého můžeme dojet k následujícímu. Kdyby tomu tak nebylo, pak by benzín nestačil na ujetí celého okruhu. Označme si tento kanystr A a následující kanystr X. Přemístěme všechen benzín z X do A a kanystr X odstraníme. Máme nyní tutéž úlohu, ale s n kanystry. Užitím indukčního předpokladu najdeme kanystr B, který je řešením úlohy s n kanystry. Kanystr B je zároveň řešením úlohy s $n+1$ kanystry, neboť v úseku BA je situace stejná, v úseku AX zcela určitě dojedeme (plyne to z výběru A) a v úseku XB je situace v obou úlohách stejná.

4. ÚLOHA

Označme si jednotlivé směry a, b, c a počty přímek v jednotlivých směrech A, B, C. Přidejme přímku ve směru a. Pokud bude na této přímce ležet k průsečíků tří přímek, pak jsme přidáním přímky zvětšili počet částí roviny o $B+C+1-k$. Odtud plyne, že pokud chceme maximalizovat počet částí roviny, nesmí se žádné tři přímky protínat v jednom bodě. Předpokládejme, že máme dělení roviny, které tuto vlastnost má. Potom bude rovina rozdělena na $(A+1)+(A+1)B+(A+B+1)C = (A+1)(B+1)(C+1)-ABC$ částí. Nechť $A+B+C=n$. Označme si $P(n)$ maximální počet částí, na něž může n přímek ve směrech a, b, c rozdělit rovinu. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \le B \le C$. Nechť $A+1 < C$. Pak postupně dostáváme $(A+1)+(A+1)B+(A+B+1)C < C+(A+1)B+(A+B+1)C < CBA-CBA+CB-CB+C-AB+B+AC+BC+C = CBA-2CB+CA+2C-CBA-CB+AB+B = C(B+1)(A+2)-B(C-1)(A+1)$. Poslední výraz je zřejmě počet částí roviny, která je rozdělena $A+1$ přímkami ve směru a, B přímkami ve směru b a $C-1$ přímkami ve směru c. Z toho vyplývá, že $P(n)$ je maximální, jestliže

1) $n=3k$, pak $A=B=C=k$
2) $n=3k+1$, pak $A=B=k$, $C=k+1$
3) $n=3k+2$, pak $A=k$, $B=C=k+1$.

Pro $P(n)$ pak dostáváme

$$\begin{aligned} P(3k) &= 3k^2+3k+1 \\ P(3k+1) &= 3k^2+5k+2 \\ P(3k+2) &= 3k^2+7k+4 \end{aligned}$$

a snadno spočteme $P(75)=1951$, $P(76)=2002$, tedy hledané $n=76$.

5. ÚLOHA

Je-li n liché, lze kameny přemístit požadovaným způsobem do jedné výseče. Důkaz tohoto tvrzení vynecháváme, je velmi snadný. Zaměříme se na těžší část úlohy. Nechť n je sudé, pak požadované situace nelze dosáhnout. Důkaz — uvažujme všechna možná rozmístění v n výsečích. O dvou rozmístěních A, B řekneme, že jsou podobná (budeme to zapisovat $A \sim B$), jestliže existuje posloupnost tahů, která převádí rozmístění A na rozmístění B. Zřejmě $A \sim A$, $A \sim B \implies B \sim A$ (operace inverzní k tahu je opět tah) a konečně $A \sim B \ \& \ B \sim C \implies A \sim C$ (nejprve vykonáme tahy převádějící A na B a pak tahy převádějící B na C). Označme si výseče ve směru hodinových ručiček postupně $A_0, A_1, \ldots, A_n = A_0$ a dále si označme M_i rozmístění, při kterém jsou všechny kameny ve výseči A_i. Ukážeme snadno, že $M_1 \sim M_2$. (Jeden zvolený kámen z výseče A_1 posuneme proti směru hodinových ručiček a ostatní kameny postupně z A_1 do A_2 a hle, ono to vyjde). Z vlastnosti relace $\sim$ snadno ověříme, že $M_i \sim M_j$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Označme nyní $N_{i,j}$ rozmístění, při němž je $n-1$ kamenů ve výseči A_i a jeden kámen ve výseči A_j. Ukážeme, že neplatí $M_i \sim N_{i,j}$. (Podotněme, že $N_{i,j}$ definujeme pouze pro $i \neq j$.) Ať provedeme jakékoli tahy vždy budou mít v souhrnu tuto vlastnost: počet kamenů přesunutých ve směru hodinových ručiček (označme ho p) je roven počtu kamenů přesunutých proti směru hodinových ručiček (označme ho q). Zřejmě $p - q \equiv 0 \pmod{n}$. Pro posloupnost tahů z M_i do $N_{i,j}$ toto neplatí a tedy M_i a $N_{i,j}$ nejsou podobné. Snadno ukážeme, že původní postavení je podobné s postavením $N_{0,\frac{n}{2}}$ a tedy není podobné s postavením M_0 a ani s žádným M_i.