Algebra

3. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. DUBNA 2018

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Želvičce Zuzce se o jejích 28. narozeninách vylíhlo z vajíčka první želvátko a další potomci se jí líhli postupně o každých dalších narozeninách – tedy druhé želvátko o 29. narozeninách, třetí o 30. narozeninách atd. Pomozte jí zjistit, zda (a případně kdy) bude mít na narozeninovém dortu stejně svíček jako všechna její želvátka dohromady.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Marian našel dvě reálná čísla x, y, pro která platí následující vztahy:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 900,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 45.$$

Jaký je součin těchto čísel?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Pro kladná reálná čísla x, y platí $xy \geq x + y$. Ukažte, že pak $x + y \geq 4$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Kuba má kladná reálná čísla a, b, c. V závislosti na nich by chtěl najít všechna reálná řešení x rovnice

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{bx+c} + \sqrt{cx+a} = \sqrt{a-bx} + \sqrt{b-cx} + \sqrt{c-ax}.$$

Ukojte jeho zvědavost.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Na rovném telegrafním drátu sedí n holubů a n holubic. Dokažte, že součet všech vzdáleností mezi ptáky různého pohlaví je větší nebo roven součtu všech vzdáleností mezi ptáky stejného pohlaví.[1]

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Madam Verča si do řady napsala celá čísla, která tvoří nekonečnou nekonstantní aritmetickou posloupnost[2]. Mezi některá z nich pak Lucien napsal středníky. Následně vytvořil novou nekonečnou posloupnost, přičemž první člen získal sečtením čísel od začátku aritmetické posloupnosti po první středník, druhý člen sečtením čísel mezi prvním a druhým středníkem a tak dále. Může tato nově vzniklá posloupnost být geometrická[3]?

---

[1] Vzdálenost dvou konkrétních opeřenců započítáváme právě jednou.

[2] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost, pokud existuje d takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Posloupnost je nekonstantní, pokud $d \neq 0$.

[3] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří geometrickou posloupnost, pokud existuje q takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = q \cdot a_n$.

Úloha 7. (5 bodů)

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna **iracionální čísla** x, y vztah

$$f(xy) = f(x+y).$$

Úloha 8. (5 bodů)

Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla a, b a c. Dále víme, že polynomy

$$\begin{aligned} ax^3 + bx + c, \\ bx^3 + cx + a, \\ cx^3 + ax + b \end{aligned}$$

mají společný kořen. Dokažte, že alespoň jeden z těchto polynomů má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.

Teorie grup III – Svoboda pro grupy

3. seriálová série Termín odeslání: 9. dubna 2018

Úloha 1. (5 bodů)
Na stěnu si chceme pověsit obraz, a to pomocí provázku, který je oběma konci připevněn k jeho rámu. Do zdi je zatlučeno deset hřebíků.

(a) Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl po vyndání libovolných devíti hřebíků, zatímco po vytažení libovolných osmi bude stále ještě viset.
(b) Pět hřebíků je stříbrných a pět zlatých. Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl pouze v případě, když vyndáme všechny hřebíky z jednoho kovu.

Úloha 2. (5 bodů)
Buď A konečná abelovská grupa a B její podgrupa taková, že $|B|$ a $|A/B|$ jsou nesoudělná čísla. Dokažte, že $A \simeq B \times A/B$.

Úloha 3. (5 bodů)
Mějme volnou grupu F_2 nad písmeny $\{a, b\}$. Ukažte, že podgrupa H generovaná všemi součiny tvaru $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ pro celá čísla m, n je izomorfní volné grupě s nekonečnou volnou bází.

Finální myšmaš

4. jarní série Termín odeslání: 14. května 2018

Úloha 1.

(a) David má doma v řadě za sebou položených pět krabic. Každou noc spí v jedné z nich, ale odmítá komukoli říct ve které. David moc rád vstává brzo, a protože jak známo *ranní ptáče dál doskáče*, každé ráno přeskočí do sousední krabice, ve které zůstane až do následujícího rána. Kačka by ráda Davida zase spatřila. Každé poledne se může podívat do jedné z krabic a zjistit, jestli v ní David je. Nalezněte strategii, díky níž Kačka časem otevře krabici, ve které se David zrovna schovává. (2 body)

(b) Bitevní pole má tvar tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Na každém políčku před bitvou stojí jeden vojín. Vojáci se nepohybují, v průběhu bitvy ale můžeme opakovaně provádět následující taktickou operaci – vybereme si libovolné políčko a na všech políčkách sousedících s ním hranou (ale ne v něm samotném) všechny vojíny povýšíme na generály a všechny generály naopak degradujeme na vojíny. Určete, pro která n lze docílit toho, aby *po bitvě byl každý generálem.* (3 body)

Úloha 2.

(a) Rado vyhrál v tombole několik tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pro každé dvě jeho množiny A a B, které nejsou stejné, platí $|A \cap B| \leq 1$. Dokažte, že Rado nemá víc než $\frac{n(n-1)}{6}$ množin. (2 body)

(b) Od své výhry v tombole Rado nepřestal o oné množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ přemýšlet. Proto se jeho rodiče rozhodli, že mu její co největší podmnožinu X zakážou. Zároveň mu ale nechtěli zkazit radost z výhry, a tak se dohodli, že zakážou jen takové prvky, aby žádná z Radových tříprvkových podmnožin neměla všechny své prvky zakázané. Dokažte, že mohou vybrat podmnožinu X s alespoň $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ prvky.[1] (3 body)

Úloha 3.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a bod Q uvnitř něj. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu Q na strany BC, AC, AB. Ukažte, že obě trojice trojúhelníků AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ a P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ

(a) mají stejný součet obsahů, (2 body)

(b) mají stejný součet poloměrů kružnic vepsaných. (3 body)

Úloha 4.

(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla a součin třetí mocninou přirozeného čísla. (2 body)

(b) Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takových, že $n^2 + 3m$ i $m^2 + 3n$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. (3 body)

---

[1] Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme $\lfloor n \rfloor$ dolní celou část čísla n, tedy největší přirozené číslo, které není větší než n.

Úloha 5.

(a) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \dots$ taková, že pro žádná dvě přirozená čísla $i \neq j$ nejsou zároveň $a_i + j$ a $a_j + i$ dělitelná 2017? (2 body)

(b) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \dots$ taková, že pro každá dvě přirozená čísla $i \neq j$ jsou $a_i + j$ a $a_j + i$ nesoudělná? (3 body)

Úloha 6.

(a) Na rovině leží krychle o hraně délky jedna. V dané výšce h nad touto rovinou ($h > 1$) je zdroj světla. Jakou nejmenší plochu může mít stín, který krychle vrhá na rovinu? Do plochy stínu počítáme i spodní podstavu krychle. (2 body)

(b) Slunce svítí rovnoběžnými paprsky kolmo na rovinu. Nad touto rovinou se v prostoru vznáší krychle o hraně délky jedna, kterou je možné libovolně otáčet. Určete, jaký největší stín může tato krychle na rovinu vrhat? (3 body)

Úloha 7.

(a) Na kružnici o poloměru jedna leží naproti sobě body A a B. Zároveň je na ní začerveněno několik dalších bodů. Nechť a je geometrický průměr[2] délek všech úseček vedených z A do červených bodů a b je geometrický průměr délek všech úseček z B do červených bodů. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a, b je menší nebo rovno $\sqrt{2}$.

(2 body)

(b) Určete nejmenší kladné reálné číslo t takové, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geq t\sqrt{ab} + (1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(3 body)

[2] Geometrický průměr nezáporných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je definován jako $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}$.