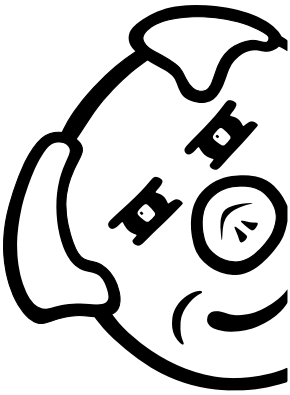
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



právě v rukou držíš druhé komentáře 37. ročníku. (Je mi jasné, že ti zákeřnější si sešitek položí na stůl a budou se radovat, jak vyzráli na bláhového orga.) Výsledková listina, kterou v nich najdeš, ale zatím nezahrnuje výsledky anglické série – ta bude opravená nedlouho potom, co se k Tobě tento text dostal. Protože jde o poslední sérii podzimní části, čekají jistě mnozí na její výsledky s napětím – především trio Josef Minařík, Danil Koževnikov a Matěj Doležálek, zkušení matadoři, jimž aktuálně patří první tři místa s rozdílem necelých 1,6 bodu. Na záda jim dýchá i Michal Beránek, ačkoli ho od nich dělí celé čtyři ročníky školy.

Nehraje se ale jen o první místa. Důležitější je, že nejúspěšnějších čtyřiadvacet řešitelů má zaručené místo na našem jarním soustředění. Rozdíly jsou těsné, takže poslední série může kartami důkladně zamíchat.

Pokud se Ti podzimní část nepovedla podle Tvých představ, je ta správná chvíle obout se do toho znovu a pořádně se opřít do jarní části semináře: v první sérii na Tebe navzdory názvu číhají spíš matematické než filozofické problémy a ve druhé spolu s námi můžeš vzdát hold pravoúhlosti. Kromě toho si můžeš namastit kapsu body díky řešení seriálové série, protože se v ní počítají všechny vyřešené úlohy. Druhý díl textu o teorii grup obsahuje plno krás, a přitom rozhodně nevyžaduje kompletní porozumění prvnímu dílu.

Hodně úspěchů v jarní části a následně krásné vzpomínky na podzimní soustředění přeje

Kuba Krásenský

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Teorie grup II. – Procitnutí symetrií
- Výsledkové listiny
- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

PraSečí konference

Chceš mít jistotu, že nezmeškáš žádnou seminářovou akci? Chceš, abychom Ti důležité informace posílali e-mailem? Chceš mít možnost psát ostatním řešitelům jinde než na chatu? Pak přesně pro Tebe vznikla e-mailová konference *ucastnici@mks.mff.cuni.cz* (je to způsob, jak poslat nějakou zprávu mnoha lidem – když na uvedenou adresu přijde e-mail, automaticky se rozešle všem odběratelům). Posílat do ní budeme kromě pozvánek na PraSečí setkání například i důležité informace ohledně organizace semináře. A jak se přihlásíš? Na adresu *mks@mff.cuni.cz* pošli své jméno a e-mailovou adresu, kterou chceš

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

k odebírání konference používat. A kdybys náhodou časem zjistil, že Tě naše zprávy nezajímají, můžeš se stejným způsobem zase odhlásit.

Náboj

Mezinárodní týmová matematická soutěž Náboj se letos uskuteční už v pátek 23. března, a to hned ve třinácti evropských městech. Podrobnosti najdeš v přiloženém letáku, podstatné ale je, že přihlašování se spouští už skoro za měsíc, v pondělí 19. února. To už je na čase začít hledat tým, protože plno bývá rychle, na výlet do Prahy nebo Opavy se místo školy se nedá jet každý den a akci, na níž řeší zároveň několik set lidí matematické úlohy, si přece nemůžeš nechat ujít. A nezapomeň – každé správné PraSe všechno vyřeší!

Soustředění

Týdenní matematicko-hravý pobyt za odměnu pro nejlepší řešitele jarní části připadl tentokrát až na polovinu listopadu. Od 11. do 18. října v Zásadě pomáhali ctihodnému rodu Salvadanaiů proti nekalým úmyslům strašlivého dona Scrofy. Dopadlo to dobře, padouch se usmál k smrti a účastníkům snad v hlavách zůstalo kromě nových znalostí z přednášek i pár veselých vzpomínek.

Pro čtyřiadvacet nejlepších z podzimní části letošního ročníku (která končí anglickou sérií) uspořádáme soustředění v termínu 14.–22. dubna. Místo ještě není známé, ale určitě se máte na co těšit.

Kombinatorické počítání

2. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Štěpán vytvořil posloupnost cifer tak, že za sebe napsal čísla $1, 2, 3, \ldots, 99$ *v tomto pořadí. Pak náhodně ukázal na jednu z osmiček. Jaká je pravděpodobnost, že oba její sousedé jsou čtyřky?*

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Ve Štěpánově posloupnosti je dohromady dvacet osmiček. Deset se jich nachází na místě jednotek. To jsou čísla 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98. Zbylých deset je na místě desítek v číslech 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89. Z dvaceti osmiček sousedí se čtyřkou osmičky v číslech 48 a 84, se dvěma čtyřkami pouze jedna osmička, a to ta v čísle 48. Pravděpodobnost, že na ní Štěpán ukáže, je proto $\frac{1}{20}$.

Poznámky:
Většina řešitelů úlohu zdárně vyřešila. Nejčastější chyby vznikaly při určení celkového počtu osmiček v posloupnosti, například z čísla 88 byla občas započtena pouze jedna osmička.

(Zuzana Svobodová)

Úloha 2.

Napište na stěny dvou šestistěnných kostek přirozená čísla tak, aby při všech možných hodech byl součet padlých čísel mezi 2 a 13 *(včetně) a aby všechny tyto součty padaly stejně často.*

(Honza)

Řešení:
Mějme kostky s čísly $(1, 1, 1, 7, 7, 7)$ a $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Ověříme, že takové kostky splňují zadání. Na první kostce padne každé z čísel 1 a 7 se stejnou pravděpodobností, a to $\frac{1}{2}$. Pokud padla jednička, můžeme dostat pouze součty 2 až 7, každý s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, protože čísla na druhé kostce jsou různá. Podobně pokud padne na první kostce 7, výsledné součty budou 8 až 13, také každý s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Z toho už vidíme, že každý ze součtů 2 až 13 padne stejně často, konkrétně s pravděpodobností $\frac{1}{12}$.

Jak se na to přijde:
Přestože u této úlohy stačilo na plný počet bodů řešení podobné tomu výše uvedenému, rádi bychom zde uvedli ještě pár nápadů a postupů, které se při hledání řešení hodily. Aby byla pravděpodobnost všech součtů stejná, musí každý z nich padnout právě ve 3 z 36 možných hodů. Další důležité pozorování je, že součet 2 můžeme dostat jen jako $2 = 1 + 1$ a pokud chceme, aby padl právě třikrát, musíme na jednu z kostek dát tři *jedničky* a na druhou jednu *jedničku*.

Poslední potřebné pozorování je, že na druhé kostce musí být různá čísla, protože jinak by nám spolu s jedničkami z první kostky některý ze součtů padl ve více než třech případech. Když následně vyzkoušíme obyčejnou hrací kostku a doplníme na první kostku tři *sedmičky*, najdeme výše uvedené řešení. Další možná řešení jsou třeba dvojice kostek $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ a $(1, 3, 5, 7, 9, 11)$; $(1, 1, 1, 3, 3, 3)$ a $(1, 2, 5, 6, 9, 10)$ nebo $(1, 1, 1, 4, 4, 4)$ a $(1, 2, 3, 7, 8, 9)$.

Poznámky:
U úloh, jako je tato, **nevyžadujeme** postup řešení, ale je potřeba nějak **zdůvodnit**, že nalezené řešení funguje. Na plný počet bodů proto stačilo řešení obsahující jen čísla na kostkách a nějaké zdůvodnění správnosti. Jedno z možných zdůvodnění je napsané ve vzorovém řešení, ale v tomto případě by stačilo i zdůvodnit správnost vypsáním všech 36 možných hodů a ukázáním, že každý součet se vyskytuje stejně často.

Několik řešitelů zadání pochopilo tak, že nemusí jako součty padat **všechna** čísla od 2 od 13, ale stačí jen když bude každý součet padat stejně často. Taková interpretace zadání ale není správná, takže jsem za ni nedával ani bod. *(Michal Töpfer)*

Úloha 3.

Kuba zapomněl svůj PIN. Samozřejmě ví, že je složený ze čtyř číslic. Jinak si ale vzpomíná jen na to, že součet cifer je dělitelný třemi. Kolik kombinací musí v nejhorším případě vyzkoušet?

(David Hruška)

Řešení:
Na jednotlivé čtyřmístné PINy se můžeme dívat jako na čísla od 0 do 9999 s tím, že nuly na začátku PINu ignorujeme, protože ciferný součet nemění. Přirozené číslo má přitom ciferný součet dělitelný třemi právě tehdy, když je třemi dělitelné. Stačí tedy spočítat, kolik čísel od 0 do 9999 je dělitelných třemi. Dělitelné třemi je zřejmě každé třetí číslo. V rozmezí od 1 do 9999 je takových čísel přesně třetina, tedy 3333. Navíc je třemi dělitelná i nula, takže PIN 0000 dává ještě jednu možnou kombinaci. V nejhorším případě tedy Kuba musí vyzkoušet 3334 možností.

Poznámky:
Skoro všichni řešitelé postupovali obdobně jako ve vzorovém řešení. Složitější postupy s počítáním kombinací podle zbytku po dělení třemi u poslední cifry většinou také, i když o trochu pracněji, vedly k cíli. Dost častým problémem bylo tvrzení, že nula není dělitelná třemi, které vedlo k jedné chybějící kombinaci. Pár řešitelů si čtyřmístný PIN vyložilo jako čtyřmístné číslo a varianty 0000 až 0999 ignorovali. Za obě tyto chyby jsem jeden bod strhávala.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 4.

Kolika způsoby lze na šachovnici 9×9 *obarvenou klasickým způsobem rozmístit devět věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly a všechny stály na stejné barvě?*

(Marian Poljak)

Řešení:
Nejprve očíslujeme řádky a sloupce čísly od 1 do 9. Poté bez újmy na obecnosti obarvíme šachovnici tak, že rohová pole jsou černá. Jinak řečeno, pole o souřadnicích $[x, y]$ je černé právě tehdy, když je $x + y$ sudé číslo. Věže se přitom nebudou ohrožovat právě tehdy, když bude v každém řádku i v každém sloupci přesně jedna věž. Nyní rozlišíme dva případy.

(1) Věže rozmístíme na černá políčka. Věže v lichých řádcích proto musí ležet v lichých sloupcích a věže v sudých řádcích musí ležet v sudých sloupcích. Jelikož se tyto dvě skupiny věží zřejmě vzájemně neohrožují, můžeme určit počty rozmístění v každé z nich zvlášť a poté je jen vynásobit. Počet rozmístění věží v lichých řádcích je roven počtu permutací množiny $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, tedy $5!$. Jinak řečeno, v prvním řádku máme pět možností, kam věž umístit (všechny liché sloupce). V druhém řádku máme již pouze čtyři možnosti, jelikož v jednom z lichých sloupců již věž stojí. A tak dále. Počet možností rozmístění věží v lichých řádcích je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, což značíme jako $5!$ a čteme „pět faktoriál“. Obdobně počet rozmístění věží v sudých řádcích je $4!$. Celkový počet možných rozmístění je $5! \cdot 4! = 2880$.

(2) Věže rozmístíme na bílá políčka. Věže v lichých řádcích musí ležet v sudých sloupcích a navíc musí v každém řádku být právě jedna věž. Lichých řádků je pět, ale sudé sloupce jsou

pouze čtyři, tedy z Dirichletova principu plyne, že alespoň dvě věže budou ležet ve stejném sloupci a budou se ohrožovat. V tomto případě proto vyhovující rozmístění neexistuje.

Věže lze rozmístit 2880 různými způsoby.

Poznámky:
Většina řešitelů vyřešila úlohu správně. Nejčastější chybou byla nedostatečná argumentace neexistence rozmístění věží na druhé barvě či tvrzení, že počet řešení je na obou barvách stejný. Za tato řešení jsem obvykle uděloval 3 body. Několik řešitelů počítalo otočená rozestavení za shodná. Jejich postup byl však naprosto v pořádku, proto jsem nestrhával žádné body.

(Lucien Šíma)

Úloha 5.

Dva prváci Pavel a Filip se zúčastnili šachového turnaje druháků. V turnaji hrál každý s každým právě jednou. Za každou výhru dostal hráč jeden bod a za prohru žádný. V případě remízy dostali oba hráči po půlbodu. Turnaj dopadl tak, že druháci měli všichni stejně bodů a Filip s Pavlem měli dohromady osm bodů. Kolik druháků se mohlo zúčastnit turnaje?

(Marian Poljak)

Řešení:
Označme počet druháků n. Pak počet všech odehraných zápasů je $(n+1)+n+\cdots+1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$. Počet odehraných zápasů je roven počtu bodů ze zadání, tedy počet půlbodů je n^2+3n+2. Z celkového počtu bodů mají prváci 8 bodů, tedy 16 půlbodů. Druhákům zůstane na rozdělení mezi sebe $n^2+3n+2-16 = n^2+3n-14$ půlbodů. Ze zadání víme, že každý druhák získal stejný počet bodů, tento počet proto musí být dělitelný počtem druháků, tzn. n. Protože n dělí n^2+3n, musí dělit i 14, proto $n \in \{1,2,7,14\}$. Pro $n=1$ a $n=2$ bude počet všech bodů menší než osm, což je ve sporu s tím, že Filip a Pavel získali dohromady osm bodů.

Ukážeme, že turnaj se 7 nebo 14 druháky je možný. Pro $n=7$ mohli například všichni druháci remizovat mezi sebou, každý z nich mohl vyhrát nad Filipem a prohrát s Pavlem. Odehrálo se $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ partií, kde $36-8=28$ bodů rozdělíme mezi 7 druháků, tedy každý druhák získal čtyři body. Pro $n=14$ mohli například všichni druháci remizovat mezi sebou, každý z nich mohl vyhrát nad Filipem a remizovat s Pavlem. Odehrálo se $\frac{16\cdot 15}{2} = 120$ partií, kde $120-8=112$ bodů rozdělíme mezi 14 druháků, tedy každý druhák získal osm bodů.

Poznámky:
S úlohou si většina řešitelů poradila. Spousta z vás však zapomněla uvést nějakou konstrukci, jak mohl turnaj probíhat, za což jsem strhávala jeden bod. Řešitelům, kteří pouze uhodli jedno z řešení a v jejich řešení se nevyskytoval ani náznak důkazu, jsem body neudělovala.

(Adéla Kostelecká)

Úloha 6.

Verča si do sešitu vypsala všechny uspořádané dvojice (A,B) podmnožin množiny $\{1,2,\ldots,2017\}$. Následně si pro každou takovou dvojici zapsala velikost množiny $A\cap B$ a všechny tyto velikosti sečetla. Kolik jí vyšlo?

(David Hruška)

První řešení:
Verča mohla to samé číslo získat i následujícím způsobem: pro každé z čísel $1,2,\ldots,2017$ si mohla zapsat počet dvojic (A,B) takových, že dané číslo leží v $A\cap B$, a všechny tyto počty sečíst.

Zvolme tedy pevné číslo $x \in \{1,2,\ldots,2017\}$. Existuje právě 2^{2016} množin $A \subseteq \{1,2,\ldots,2017\}$ takových, že $x \in A$. Pro každé z 2016 čísel různých od x máme totiž dvě možnosti: buď v množině A bude, nebo ne. Stejně tak existuje 2^{2016} množin $B \subseteq \{1,2,\ldots,2017\}$, pro něž je $x \in B$. Jelikož

všechny uspořádané dvojice (A, B) takové, že $x \in A \cap B$, dostaneme nezávislou volbou množiny A obsahující x a množiny B obsahující x, je počet těchto dvojic $2^{2016} \cdot 2^{2016} = 4^{2016}$. Jelikož tento počet nezávisí na x a Verča sčítá takové počty za všech 2017 možných x, vyjde jí součet $2017 \cdot 4^{2016}$.

Druhé řešení:
Označme $M = \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Pro množinu $A \subseteq M$ budeme její doplněk značit A^c, tj. $A^c = M \setminus A$. Uvažujme dvojici (A, B) podmnožin množiny M. Potom čtyři množiny $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ jsou po dvou disjunktní[1] a jejich sjednocením je M. Proto

$$|A \cap B| + |A \cap B^c| + |A^c \cap B| + |A^c \cap B^c| = 2017.$$

Všechny uspořádané dvojice podmnožin množiny M si rozdělíme do (neuspořádaných) čtveřic $\{(A, B); (A, B^c); (A^c, B); (A^c, B^c)\}$. Jelikož dvojic je $\left(2^{2017}\right)^2$ a každá čtveřice dvojic přispěje do součtu dohromady číslem 2017, dostáváme, že součet je

$$\frac{2017 \cdot \left(2^{2017}\right)^2}{4} = 2017 \cdot 4^{2016}.$$

Poznámky:
Úloha se dala řešit mnoha různými způsoby. Mezi došlými řešeními byla pestrá směs prvního a druhého způsobu řešení a pak dalších více či méně náročných počítání se sumami.

Několik řešitelů zmátl pojem *uspořádaná dvojice* (A, B) a vylučovali případ $A = B$, ačkoli ho zadání nezakazuje.

Na závěr bych se chtěl za organizátory omluvit – v papírové verzi zadání došlo k tiskové chybě a vyskytlo se tam $A \setminus B$ místo $A \cap B$. Naštěstí to nemělo na povahu ani obtížnost úlohy vliv (jak je dobře vidět z druhého řešení), a proto jsem řešení tohoto „alternativního“ zadání bodoval stejně.

(Tonda Češík)

Úloha 7.

Jinému Kubovi na zahrádce roste strom[2]*, který má ve svých 2017 vrcholech napsaná čísla 1 až 2017. Kuba přitom umí čarovat – když ukáže na nějakou hranu stromu, čísla v jejích vrcholech se prohodí. Jednoho dne se Kuba rozhodl postupně v nějakém pořadí ukázat na všechny hrany stromu (na každou právě jednou) a rozmyslel si, že v závislosti na zvoleném pořadí mu takto může nakonec vzniknout m různých očíslování. Kolik nejméně prvočíselných dělitelů počítaných včetně násobnosti*[3] *může mít m?*

(Jakub Löwit)

Řešení:
Ačkoli se v úloze mluví o prvočíslech, série je na téma kombinatorické počítání. Pojďme tedy spočítat, kolik možných očíslování Kubovi mohlo vyjít. Každý strom na aspoň dvou vrcholech lze sestavit tak, že začneme s jednou hranou a k ní postupně přilepujeme listy. Buď $\mathcal{T}$ strom s alespoň dvěma vrcholy. Napojme na nějaký jeho vrchol v s $S \geq 1$ sousedy nový list u. Jak se zvětší počet různých očíslování tohoto nového stromu $\mathcal{T}'$ oproti tomu předchozímu?

Ať už Kuba na hrany $\mathcal{T}$ ukazoval v jakémkoli pořadí, ve vrcholu v se vystřídalo $S + 1$ čísel – jedno tam bylo na začátku a zbylých S se tam dostalo vždy po tom, co Kuba ukázal na patřičnou hranu sousedící s v. Tato čísla musí být po dvou různá; pokud by se nějaké číslo dostalo do téhož vrcholu dvakrát, muselo by mezitím obkroužit cyklus, jenže ten ve stromu není.

[1] Žádné dvě z nich nemají společný prvek.

[2] Viz http://mks.mff.cuni.cz/archive/34/serial.pdf, kapitola *Stromy*.

[3] Tedy například u 12 bychom získali tři – jednu trojku a dvě dvojky.

Po přidání listu u se ptáme, jak se výsledné očíslování původních vrcholů stromu změní v závislosti na tom, kdy Kuba ukáže na hranu uv. Ve chvíli, kdy Kuba ukáže na tuto hranu, se číslo, které je zrovna ve vrcholu v, vymění s číslem, jež je již od začátku v u. Číslo z vrcholu v pak už zůstane navždy v listu u, číslo z vrcholu u ho naopak „zastoupí“ v dalším prohazování. Výsledné očíslování $\mathcal{T}'$ proto bude stejné jako pro původní strom $\mathcal{T}$ až na to, že číslo, které ve chvíli, když Kuba ukázal na hranu uv, bylo ve vrcholu v, se vymění s číslem, které začínalo v u. Původní očíslování se tedy může změnit $S+1$ způsoby v závislosti na tom, které číslo bude zrovna ve v, když Kuba ukáže na hranu uv.

Ještě si všimněme, že dvě různá pořadí hran vedoucí k různým výsledným očíslováním stromu $\mathcal{T}$ nemohou po přilepení listu vést k stejnému očíslování. Platí to proto, že z očíslování nového stromu lze jednoznačně vyvodit, jak by očíslování dopadlo, kdyby Kuba nevyužil hranu uv. Z předchozího plyne, že po přidání listu se počet různých očíslování zvětší $(S+1)$-krát.

Nyní můžeme induktivně snadno nahlédnout, že celkový počet různých očíslování je součin faktoriálů z počtů sousedů všech vrcholů, a pak už příklad přímočaře dokončíme. To ale ani není potřeba; je-li strom hrana, je odpovídající počet prvočíselných dělitelů počtu různých očíslování nula. Dále přidáním listu ke stromu se počet prvočíselných dělitelů zvýší alespoň o jedna. Kubův strom má 2017 vrcholů, odpovídající počet tedy musí být alespoň 2015. Tohoto čísla naopak dosáhneme s cestou, neboť ta má různých očíslování 2^{2015}, což je číslo s 2015 prvočíselnými děliteli.

Volně podle Michala Beránka, Ondřeje Tkaczyszyna a Matěje Doležálka:
Ukážeme si ještě jiný pohled, ze kterého vyplyne, kde se vzal onen záhadný součin faktoriálů počtů sousedů všech vrcholů.

Tvrdíme, že umíme odvodit výsledek libovolné posloupnosti Kubových magických operací jen za předpokladu, že pro každý vrchol víme, v jakém pořadí Kuba prohazoval hrany sousedící s tímto vrcholem. Navíc pro každé dané podmínky na pořadí hran kolem každého vrcholu existuje nějaká posloupnost operací, která tyto podmínky splňuje. Z toho už plyne ona podivná formule, neboť pro každý vrchol v je počet možností, jak seřadit hrany s ním sousedící, právě faktoriál z počtu jeho sousedů.

Mějme tedy nějakou možnou posloupnost Kubových operací a pro každý vrchol si označme tu z jeho sousedních hran, kterou Kuba použil jako první. Protože vrcholů stromu je o jedna více než jeho hran, nějakou hranu jsme označili pro oba sousední vrcholy. To znamená, že nezávisle na tom, v jakém pořadí se Kuba díval na hrany, platí, že když Kuba ukázal na tuto hranu, na obou jejích koncích byla stále stejná čísla jako na začátku. Prohoďme tedy tato dvě čísla a umažme tuto hranu našeho stromu, který se tak rozpadne na dva menší stromy. Na těch nyní můžeme pokračovat úplně stejným způsobem, čímž nakonec dostáváme nějakou posloupnost operací. Vzhledem k jednoznačnosti našich rozhodnutí musí všechny posloupnosti operací, které splňují stejnou podmínku, dopadnout stejně.

Poznámky:
Většina řešitelů se vydala přímočarou cestou prvního vzorového řešení. *Michal Beránek* a *Ondřej Tkaczyszyn* si vysloužili imaginární bod za to, že výrazu *součin faktoriálů počtu sousedů všech vrcholů* dali kombinatorický význam. *Matěj Doležálek* nahlédl, že permutace vrcholů stromu je složena jen z jednoho cyklu, který odpovídá tzv. eulerovské procházce na stromě.

Cesta není jediný strom, pro který nastává rovnost. Zkus najít všechny!

(Vašek Rozhoň)

Úloha 8.

Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost celých čísel, která pro každé přirozené n splňuje $\sum_{d|n} a_d = 2017^n$. Ukažte, že $n \mid a_n$ pro každé přirozené n.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Buď A_n množina všech různých nakreslení náhrdelníků s n korálky obarvenými 2017 barvami, jejichž obarvení se neopakuje s žádnou periodou kratší než 2017. Dvě nakreslení, která se liší pootočením, považujeme za různá. Za chvíli induktivně ukážeme, že čísla a_n jsou jednoznačně určena jako $a_n = |A_n|$. Z toho už bude plynout $n \mid |A_n|$, poněvadž všechna nakreslení náhrdelníků z A_n umíme rozdělit do skupin po n členech – do jedné skupiny dáme všech n různých pootočení jednoho náhrdelníku.

Pro $n = 1$ musí z podmínky ze zadání platit $a_1 = 2017$. To přesně odpovídá počtu obarvení jednoho korálku pomocí 2017 barev. A protože náhrdelník o jednom korálku nejde netriviálně otáčet, je skutečně $2017 = |A_n|$.

Nyní nechť $a_m = |A_m|$ platí pro všechna $m < n$. Pak tento vztah dokážeme i pro n. Uvažujme nakreslení libovolného náhrdelníku s n korálky. Nechť B_i je množina takových nakreslení, kde nejmenší netriviální otočení, které obrázek nezmění, otáčí náhrdelník právě o i pozic. Tedy v B_i jsou ty obrázky náhrdelníků, které obsahují opakující se sekvenci i korálků, ale žádnou kratší. Pokud $i \nmid n$, je zřejmě $|B_i| = 0$. Zjevně přitom $|A_n| = |B_n|$.

Protože celkově u každého kamínku máme na výběr z 2017 barev a každý náhrdelník lze o několik (maximálně n) pozic otočit tak, aby se přenesl sám na sebe, platí

$$\sum_{d|n} |B_d| = 2017^n.$$

Nyní nahlédneme, že je ve skutečnosti $|A_d| = |B_d|$. V B_d jsou právě obrázky náhrdelníků s periodou d korálků, tedy vyříznutím části o d korálcích a jejím spojením do kruhu dostaneme jeden z obrázků z A_d. Pozice řezu v rámci periody délky d přitom určuje, který z d obrázků zmenšeného d-korálkového náhrdelníčku dostaneme. Na druhou stranu, vezmeme-li $\frac{n}{d}$ kopií stejného obrázku z A_d, rozdělíme je na stejném místě a spojíme za sebe, dostaneme zjevně obrázek náhrdelníku z B_d. Různá místa rozdělení náhrdelníčku, kterých je d, přesně odpovídají d různým nakreslením velkého náhrdelníku. Tím jsme pro libovolné $d \mid n$ našli bijekci mezi A_d a B_d, tedy pro taková d máme $|A_d| = |B_d|$.

Z předešlého tedy máme $\sum_{d|n} |A_d| = 2017^n = \sum_{d|n} a_i$, přičemž pro všechna přirozená $d < n$ už z indukčního předpokladu platí rovnost $|A_d| = a_d$. Aby ale dokázaná rovnost platila, musí být také $|A_n| = a_n$, čímž je důkaz indukčního kroku dokončen.

Poznámky:
Nikoho nenapadlo řešit osmičku ze série Kombinatorické počítání kombinatorickým počítáním. Objevilo se však několik více či méně ošklivých řešení indukcí, zkoumáním dělitelnosti a v několika málo případech i Möbiovou inverzní formulí.

(Rado van Švarc)

Rovnostranné trojúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

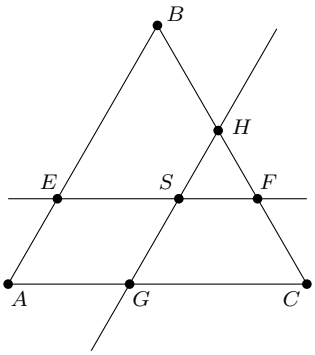
Je dán rovnostranný trojúhelník. Dokreslete do obrázku dvě přímky tak, aby se v něm pak nacházely čtyři rovnostranné trojúhelníky (mohou se překrývat).

(Tonda Le)

ŘEŠENÍ:

Dovnitř rovnostranného trojúhelníku ABC nakreslíme bod S. Potom jím vedeme dvě přímky, každou rovnoběžně s jinou stranou trojúhelníka. Tyto dvě přímky vytvoří spolu s původním trojúhelníkem čtyři rovnostranné trojúhelníky.

Pokud jedna z přímek protíná strany trojúhelníka AB a BC v bodech E a F a druhá protíná strany AC a BC v bodech G a H, dostaneme rovnostranné trojúhelníky ABC, EBF, GHC, SHF.



POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu vyřešila správně a různými způsoby popsala, jak přímky nakreslí. Někteří se poněkud zbytečně snažili dokazovat věci navíc, např. že více trojúhelníků se za pomocí dvou přímek nakreslit nedá, což nebylo součástí úlohy. Jiní poslali pouze obrázek bez dalšího vysvětlení, to také není zcela správně, řešení je třeba ve většině případů vysvětlit i slovně.

Bod S se může nacházet i vně trojúhelníka ABC, pokud bude osově souměrný s některým bodem, který je uvnitř trojúhelníku. Čtyři rovnostranné trojúhelníky pak budou vypadat podobně, jenom HSF bude vně trojúhelníka ABC. *(Zuzka Svobodová)*

Úloha 2.

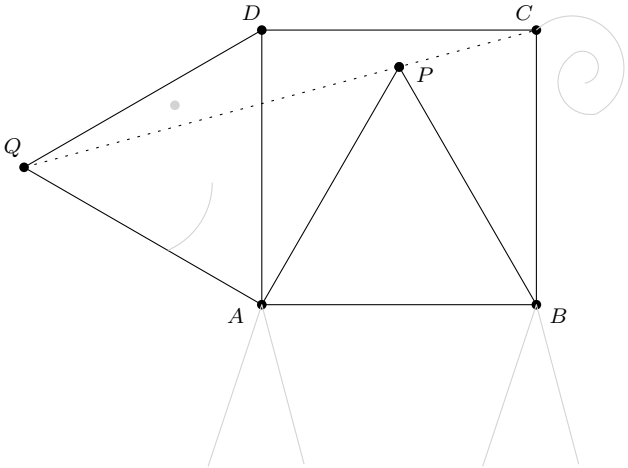
Je dán čtverec $ABCD$. V něm je vyznačený bod P takový, že je trojúhelník ABP rovnostranný. Mimo čtverec zvolme bod Q tak, aby byl trojúhelník ADQ rovnostranný. Dokažte, že body Q, P a C leží na jedné přímce.

(Tonda Le/David)

Řešení:

Dokážeme, že $\sphericalangle QPC$ je úhlem přímým. V rovnostranném trojúhelníku jsou velikosti všech úhlů rovné 60°. Protože je $\sphericalangle BAD$ pravý a $|\sphericalangle BAP| = 60°$, z jejich rozdílu dostáváme: $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle BAP| = 90° - 60° = 30°$. Dále platí $|\sphericalangle QAP| = |\sphericalangle QAD| + |\sphericalangle PAD| = 60° + 30° = 90°$.

Trojúhelník QAP je tedy pravoúhlý, a navíc je i rovnoramenný, neboť ze zadání $|QA| = |AD| = |AB| = |AP|$. Z toho důvodu a z celkového součtu úhlů v trojúhelníku platí: $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle APQ| = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$. Trojúhelník BPC je rovněž rovnoramenný, neboť $|BP| = |BC|$. Analogicky jako jsme došli k tomu, že $|\sphericalangle PAD| = 30°$, je $|\sphericalangle PBC| = 30°$. Pro velikost úhlu $|\sphericalangle BPC|$ platí: $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BCP| = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Tím jsme skoro hotovi. Úhel $\sphericalangle QPC$ je součtem tří úhlů: $|\sphericalangle QPC| = |\sphericalangle QPA| + |\sphericalangle APB| + |\sphericalangle BPC| = 45° + 60° + 75° = 180$. Body Q, P a C svírají úhel 180°, tedy leží na přímce.



Poznámky:

Řešení se dělila především na dvě velké skupiny – podobná vzorovému a dokazující shodnou velikost úhlů QCD a PCD, což bylo provedeno mnoha různými způsoby (podobnost trojúhelníků, úhlení, směrnice, …). Ta byla povětšinou správná. Další skupiny byly opět dvě – analytická řešení a řešení se špatným předpokladem. Analytická řešení se mi nelíbila, takové lehké úlohy, jakou tato byla, je nehezké řešit analyticky. Všechna tato řešení byla správná a ne až tak ošklivá, proto jsem jim nakonec záporné imaginární body nedal. Poslední kategorií byla řešení implicitně využívající faktu, že body Q, P a C tvoří přímku. Tato řešení využívala souhlasných úhlů nebo faktu, že například součet úhlů $|\sphericalangle PQA| + |\sphericalangle QAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCP| = 360°$ – tedy, že P už na straně QC čtyřúhelníku $ABCQ$ leží. Taková řešení ode mě dostala po bodu, většinou za zbytek řešení či úhlení.

(Jan Kadlec)

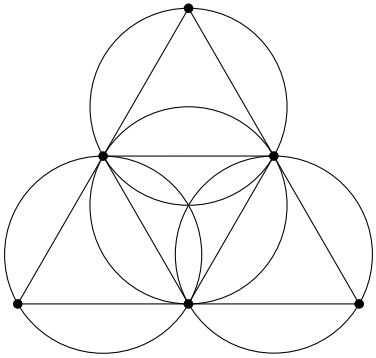
Úloha 3.

V rovině leží pět shodných rovnostranných trojúhelníků, které mohou být různě natočené. Dokažte, že pro každý z nich lze zbylé trojúhelníky bez otáčení posunout tak, aby ho celý zakrývaly. Trojúhelníky se mohou překrývat.

(Honza)

Řešení:

Libovolný trojúhelník (budeme ho zvát velký) ze zadání se dá rozdělit pomocí středních příček na čtyři shodné trojúhelníky (zveme malé) s poloviční délkou hrany. Kružnice opsaná malému trojúhelníku má stejnou velikost jako kružnice vepsaná velkému trojúhelníku. Malý trojúhelník se do ní celý vejde. Velký trojúhelník rozdělený středními příčkami pokryjeme tak, že každý ze čtyř velkých trojúhelníků umístíme těžištěm do těžiště jednoho z malých trojúhelníků. U každé dvojice splyne kružnice vepsaná velkého trojúhelníka a kružnice opsaná malého, a tím musí být všechny čtyři části velkého trojúhelníka pokryty, tedy i celý velký trojúhelník musí být pokryt.



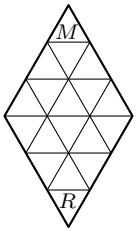
Poznámky:

Někteří řešitelé si všimli, že nám k pokrytí stačí dokonce jen tři trojúhelníky – umístíme je stejně jako když umisťujeme čtyři ve vzorovém řešení, ale vynecháme trojúhelník s těžištěm v těžišti pokrývaného velkého trojúhelníka. Argument, že jeden z trojúhelníků umístíme doprostřed pokrývaného trojúhelníka a zbylými třemi se to už určitě podaří dopokrýt, nebyl uznávám, protože u něj chybí důkaz. *(Zuzka Svobodová)*

Úloha 4.

Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n-krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo buď jako první stoupne na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii[4].

[4]Hráč má vyhrávající strategii, pokud umí vyhrát nezávisle na tom, jak táhne jeho protivník.



Situace na začátku hry pro $n = 3$

(Kuba L.)

Řešení:

Políčka hracího plánu obarvíme černou a bílou barvou tak, aby Michal stál na začátku hry na černém políčku a aby každá dvě políčka sousedící hranou měla různou barvu.

Obarvený hrací plán pro $n = 3$

Platí, že vždy po vykonání tahu se hráč přesune na políčko opačné barvy. Na začátku hry stojí hráči na políčkách různých barev a Michal začíná. Tudíž vždy po Michalově tahu budou hráči stát na políčkách stejné barvy a po Radově tahu budou stát na políčkách různých barev. Speciálně tedy po Radově tahu nemohou stát oba hráči na stejném políčku. Není tedy možné, aby Rado vyhrál tím, že si stoupne na políčko, na kterém stojí Michal.

Michalova vítězná strategie je tedy dojít nejkratší cestou do protějšího políčka. Jelikož hrací plán je symetrický a Michal začíná, nemůže se stát, že by Rado došel do protějšího políčka dříve než on. Michal proto nutně vyhraje – buď tím, že dojde do protějšího políčka, nebo tím, že se někdy cestou postaví na políčko, kde právě stojí Rado.

Poznámky:

Naprostá většina došlých řešení byla správně, což mne potěšilo. Pro důkaz toho, že Rado nemůže vyhrát „zašlápnutím“ Michala, využívala buď argument obarvování, či (v podstatě stejný) argument o paritě vzdálenosti hráčů. *(Tonda Češík)*

Úloha 5.

Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC. Přímky procházející vrcholem A, které dělí úhel $\sphericalangle BAC$ na třetiny, protínají kružnici k podruhé v bodech X_1 a X_2. Body X_3 až X_6 jsou definované podobně pomocí vrcholů B a C. Navíc body $X_1, X_2, \ldots, X_6$ leží na k v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že přímky X_1X_4, X_2X_5 a X_3X_6 určují rovnostranný trojúhelník.

(Kuba Löwit)

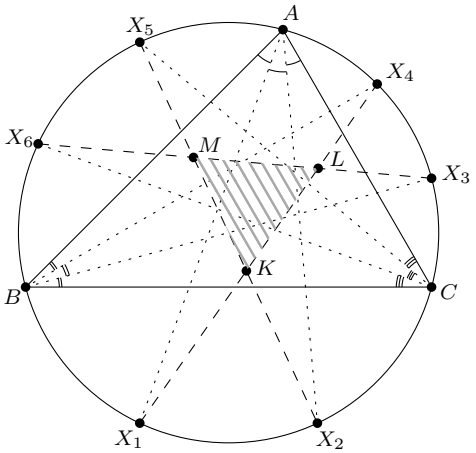
Řešení:

Označíme si úhly v trojúhelníku ABC standardně α, β a γ a dále postupně K, L, M průsečíky X_1X_4 s X_2X_5, X_1X_4 s X_3X_6 a X_2X_5 s X_3X_6.

Při výpočtu velikosti úhlu LKM použijeme shodnosti obloukových úhlů na kružnici a součtu úhlů v trojúhelníku ABC:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle LKM| &= |\sphericalangle X_4KX_5| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle KX_4X_5| - |\sphericalangle KX_5X_4| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle X_1X_4B| - |\sphericalangle BX_4X_5| - |\sphericalangle X_2X_5C| - |\sphericalangle CX_5X_4| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle X_1AB| - |\sphericalangle BCX_5| - |\sphericalangle X_2AC| - |\sphericalangle CBX_4| \\
&= 180^\circ - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta \\
&= 180^\circ - \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= 60^\circ.
\end{aligned}$$

Při hledání velikosti úhlů KLM a KML budeme postupovat analogicky. Protože jsou body X_1 až X_6 definovány podobným způsobem, pouze cyklicky pro A, B a C, zjistíme, že $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KML| = 60^\circ$. Protože všechny vnitřní úhly trojúhelníka KLM jsou shodné, je trojúhelník vždy rovnostranný.



Poznámky:

Zpravidla všechna došlá řešení byla správně. Ti, co využili obloukové lemma, které říká, jak velkému oblouku odpovídá úhel, který svírají dvě tětivy, si usnadnili práci a měli řešení na pár řádků. Někteří naopak vyjadřovali velikosti spousty úhlů, než se dobrali k hledanému úhlu, ale i tak byla jejich řešení správná.

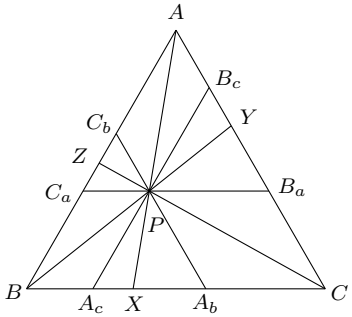
(„madam“ Verča Hladíková)

Úloha 6.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P. Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímek AP, BP, CP se stranami trojúhelníku ABC. Ukažte, že $|PX| + |PY| + |PZ| < |AB|$.

(David Hruška)

Řešení:



Bodem P povedeme rovnoběžky se všemi třemi stranami trojúhelníka ABC. Průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC nazveme A_b. Analogicky pojmenujeme i všechny ostatní průsečíky. Všimneme si, že (například kvůli souhlasným úhlům u příslušné strany trojúhelníka ABC) jsou trojúhelníky C_aC_bP, A_cA_bP i B_aB_cP rovnostranné.

Délku libovolné úsečky, která začíná ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka a končí někde v něm, můžeme shora odhadnout délkou strany (protože množina všech bodů, které jsou od vrcholu rovnostranného trojúhelníka dál než jiný jeho vrchol, je doplněk kruhu se středem v tomto vrcholu a poloměrem rovným délce strany trojúhelníka, a ten leží celý mimo trojúhelník).

Ještě potřebujeme dvě pozorování. První z nich je, že X je vnitřní bod úsečky A_cA_b a analogicky pro body Y a Z a pro úsečky B_aB_c a C_aC_b. To ale plyne z podobnosti trojúhelníků ABX a PA_cX (jelikož PA_C je rovnoběžná s AB, jsou tyto trojúhelníky stejnolehlé se středem stejnolehlosti v X).

Druhé pozorování je, že C_aPA_cB a B_aPA_bC jsou rovnoběžníky (jejich strany byly zvoleny jako rovnoběžky).

Nyní tedy víme (z druhého odstavce a prvního pozorování), že délky $|PX|$, $|PY|$, $|PZ|$ můžeme odhadnout pomocí strany rovnostranného trojúhelníka, ve kterém leží, následovně:

$$|PX| < |A_cA_b|$$
$$|PZ| < |C_aP|$$
$$|PY| < |PB_a|$$

Protože ale podle druhého pozorování platí $|C_aP| = |BA_c|$ a $|PB_a| = |A_bC|$, můžeme předchozí nerovnosti sečíst a dostaneme

$$|PX| + |PY| + |PZ| < |BA_c| + |A_cA_b| + |A_bC| = |BC| = |AB|,$$

což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
Zhruba tři čtvrtiny řešení, která přišla, byla správně. Z nich zhruba půlka postupovala jako vzorák. Všichni ostatní úspěšní řešitelé využili toho, že vzhledem k tomu, že součet obsahů trojúhelníků ABP, BCP a CAP je roven obsahu trojúhelníka ABC, je i součet výšek z vrcholu P těchto trojúhelníků roven výšce trojúhelníka ABC.

Přišlo ale i poměrně hodně řešení, která úlohu vyřešila pro některé speciální případy, a bez důkazu tvrdila, že v ostatních případech už musí být součet ze zadání nutně menší. Některá řešení dokonce tvrdila, že maximum součtu je pro P v těžišti trojúhelníka, což není pravda. Maximum najdeme, pokud se budeme nekonečně přibližovat (právě jedné libovolné) straně. Takovým řešením jsem se nakonec rozhodl dát motivační jeden bod. *(Viki Němeček)*

Úloha 7.

V sešitě je nakreslený trojúhelník ABC, pro který platí, že úhel při vrcholu A je dvojnásobkem úhlu při vrcholu B. Anička v něm vyznačila bod P a pak si všimla, že vzdálenosti bodu P od bodů A a B jsou stejné. Navíc je délka úsečky AC stejná jako délka úsečky CP. Dokažte, že přímka CP dělí úhel při vrcholu C v poměru $2 : 1$.

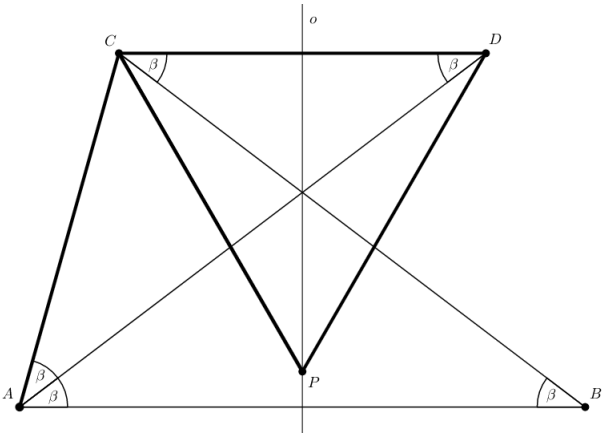
(Kuba L.)

Řešení:

Označíme si o osu AB. Nechť D je obraz bodu C v osové souměrnosti podle o. V této osové souměrnosti se dále A zobrazí na B, z čehož plyne, že AB a CD jsou rovnoběžné.

Označíme si β velikost úhlu ABC. Ze zadání víme, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2\beta$. Ze symetrie (podle o) plyne, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABC| = \beta$. Tedy také $|\sphericalangle CAD| = \beta$. Dále z rovnoběžnosti AB a CD máme rovnost střídavých úhlů $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle BAD| = \beta$ a $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ABC| = \beta$.

Anička si všimla, že $|AP| = |BP|$, tedy P leží na o, z čehož plyne, že také $|DP| = |CP|$. Ze zadání víme, že $|CP| = |AC|$. Jelikož $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA|$, tak je trojúhelník ACD rovnoramenný se základnou AD, a tudíž $|AC| = |CD|$. Celkem máme $|DP| = |CP| = |CD|$, tedy trojúhelník CPD je rovnostranný. Toho využijeme v následujícím výpočtu: $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PCD| - |\sphericalangle BCD| = 60° - \beta$. Konečně pro velikost úhlu $\sphericalangle ACP$ platí: $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle BCP| = (180° - 3\beta) - (60° - \beta) = 120° - 2\beta = 2(60° - \beta) = 2|\sphericalangle PCB|$, což je kýžený poměr.



Poznámky:

Většina došlých řešení byla správně. Řešitelé postupovali podobně jako ve vzorovém řešení, někteří zkonstruovali bod D jako průsečík kružnice opsané trojúhelníku ABC a osy úhlu u vrcholu A . Pár řešitelů zvolilo náročnější cestu a k řešení se dobralo za pomoci několika sinových vět a součtových vzorců.

(Lucien Šíma)

Úloha 8.

V různostranném trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Osy úhlů CAB, BCA protínají protější strany v bodech X, Y a sebe navzájem v I. Nad úsečkou XY sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky XYP a XYQ. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku BPQ. Ukažte, že $OI \perp AC$.

(Rado Švarc)

Řešení:

BÚNO nechť P leží ve stejné polorovině určené přímkou XY jako B.

Platí $|\sphericalangle AIC| = 180° - |\sphericalangle ICA| - |\sphericalangle CAI| = 180° - \frac{|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB|}{2} = 180° - \frac{180° - |\sphericalangle ABC|}{2} = 90° + \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} = 120°$. Protože $|\sphericalangle XBY| = 60° = 180° - |\sphericalangle XIY|$, leží body X, Y, I a B na jedné kružnici.

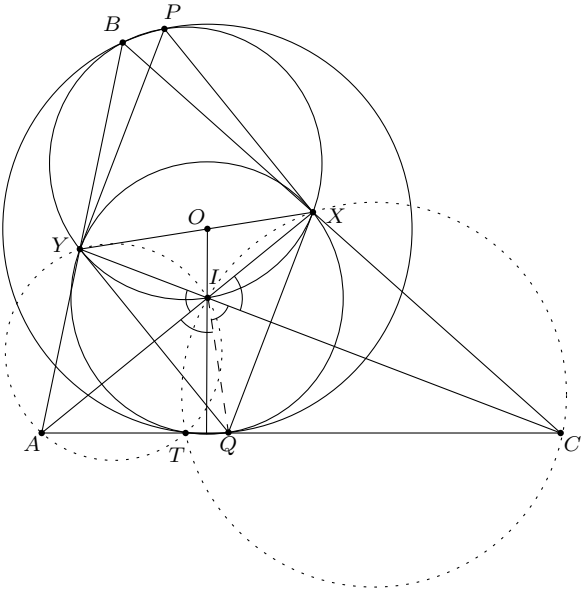
Označme si jako Q' průsečík osy úhlu AIC s úsečkou AC. Ukážeme, že $Q = Q'$.

Platí $|\sphericalangle AIY| = 180° - |\sphericalangle AIC| = 60° = |\sphericalangle AIQ|$. Zároveň platí $|\sphericalangle YAI| = |\sphericalangle Q'AI|$, takže Q' je obraz Y podle přímky AI. Proto je $|XY| = |XQ'|$. Analogicky dostaneme $|YX| = |YQ'|$, takže $XQ'Y$ je rovnostranný trojúhelník. Tedy $Q = Q'$.

Protože X a Y jsou obrazy Q při překlopení podle přímek AI a CI a protože I na obou těchto přmkách leží, platí také $|IX| = |IQ| = |IY|$.

Nyní nechť se kružnice opsané trojúhelníkům AIY a CIX podruhé protínají v bodě T. Platí $|\sphericalangle ATI| = 180° - |\sphericalangle AYI| = |\sphericalangle BYI| = 180° - |\sphericalangle BXI| = |\sphericalangle CXI| = 180° - |\sphericalangle CTI|$. Z toho plyne, že T leží na AC. Zároveň však $|\sphericalangle TYX| = |\sphericalangle TYI| + |\sphericalangle IYX| = |\sphericalangle TAX| + |\sphericalangle IXY| = |\sphericalangle XAY| + |\sphericalangle YXA| = 180° - |\sphericalangle AYX| = |\sphericalangle XYB|$, kde jsme využívali obvodové úhly v tětivových čtyřúhelnících a fakt, že XIY je rovnoramenný trojúhelník. Máme tedy $|\sphericalangle TYX| = |\sphericalangle XYB|$. Analogicky dostaneme $|\sphericalangle TXY| = |\sphericalangle YXB|$. Takže T je obraz B podle přímky XY.

Zjevně Q je obraz bodu P při překlopení podle přímky XY. Protože T je obrazem B podle této přímky, je úsečka TQ obrazem BP při tomto překlopení. Proto je $PQTB$ rovnoramenný lichoběžník, tedy T leží na kružnici opsané BPQ. Z toho plyne, že O leží na ose úsečky TQ. Zároveň platí $|\sphericalangle XTY| = |\sphericalangle XBY| = 60° = |\sphericalangle XQY|$, tedy T leží na kružnici opsané XYQ. Ale už jsme ukázali, že $|IX| = |IQ| = |IY|$, tedy I je střed kružnice opsané XYQ. Takže I leží také na ose úsečky TQ. Proto je OI osa úsečky TQ, takže skutečně $OI \perp AC$.



Poznámky:
Většina přijatých řešení byla správně. Každá dvě řešení byla různá a sešla se celá plejáda různých přístupů, z nichž takřka všechny dospěly do úspěšného konce. Vzorové řešení si popůjčovalo myšlenky z několika různých přijatých řešení, aby byl výsledný vzorák co nejelegantnější.

(Rado Švarc)

Teorie grup I – Moc abstrakce

1. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Mějme grupu G, ve které pro každý prvek g platí $g^2 = e$. Ukažte, že G je abelovská.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každé dva prvky $g, h \in G$ platí $gh = hg$. Zvolme tedy libovolné dva prvky $g, h \in G$. Z podmínky ze zadání máme $gg = g^2 = e$, $hh = h^2 = e$. Vynásobením těchto dvou rovností dostáváme $gghh = e$. Dále také platí $(gh)(gh) = (gh)^2 = e$. Takže dohromady musí být $gghh = ghgh$. Tuto rovnost nyní můžeme přenásobit g^{-1} zleva a poté h^{-1} zprava. Tím se nám rovnost vykrátí na $gh = hg$. Takže $gh = hg$ pro všechna $g, h \in G$ a G je tedy abelovská.

Poznámky:

K důkazu se dalo dostat mnoha různými manipulacemi s prvky, ale všechna správná řešení víceméně odpovídala vzorovému.

(Filip Bialas)

Úloha 2.

Uvažte následující dvě grupy: G je grupa, jejíž prvky jsou všechna kladná racionální čísla s binární operací jejich klasického násobení. Naproti tomu H je grupa všech polynomů v jedné proměnné s celočíselnými koeficienty a její binární operací je běžné sčítání polynomů. Ukažte, že $G \simeq H$.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Každé racionální číslo k můžeme zapsat jednoznačně jako $k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$, kde p_i je i-té prvočíslo. Můžeme napsat nekonečný součin, protože od nějakého i bude už $\alpha_i = 0$, tedy budeme násobit výraz jedničkou. Také se může stát, že α_i je někdy záporné, protože k můžeme zapsat jako $\frac{q}{r}$, tedy všechna prvočísla v r mají záporné α_i.

Uvažme zobrazení φ, pro které platí

$$\varphi(k) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i.$$

Všimněme si, že toto zobrazení zobrazí jedno číslo na právě jeden polynom. Pro polynom jsme zase použili nekonečnou sumu, protože od nějaké pozice budou už všechny jeho koeficienty nulové, tedy do sumy těmito sčítanci nic nepřidáme.

Ukážeme, že je φ hledaný izomorfismus. Je to homomorfismus, jelikož

$$\varphi(k \cdot l) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\beta_i}\right) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) x^i =$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\right) + \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\beta_i}\right) = \varphi(k) + \varphi(l).$$

Musíme ještě ukázat, že je φ bijekce. Je surjektivní, neboť pro každý polynom $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ můžeme vzít kladné racionální číslo $k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ a máme $\varphi(k) = f$. A také prosté, neboť aby se nějaké kladné racionální číslo zobrazilo na f, tak musí mít stejné vyjádření pomocí prvočísel jako k. Tedy nikdy neexistují dvě různá čísla, která by se zobrazila na jeden polynom.

Ukázali jsme, že je φ homomorfismus a zároveň bijekce. Takže se jedná o izomorfismus a grupy ze zadání jsou izomorfní.

Poznámky:
Úlohu neposlalo moc řešitelů, ale ti, kteří ji poslali, ji měli správně. Řešili ji stejně jako vzorové řešení, občas speciálně ošetřili záporné α_i, ale to není třeba.

(Kuba Svoboda)

Úloha 3.

Nechť G je grupa a N nějaká její normální podgrupa, přičemž faktorgrupa G/N je nekonečná cyklická. Dokažte, že pak pro každé přirozené n existuje podgrupa $H \leq G$ s indexem n.

(Jakub Löwit)

Elegantní řešení:
Grupa N je v G normální, takže G/N skutečně existuje. Přitom o ní víme, že je nekonečná cyklická. Existuje tedy prvek $a = gN \in G/N$, který grupu G/N generuje, tj. G/N obsahuje právě prvky a^k pro $k \in \mathbb{Z}$. Zobrazení $\varphi : G/N \to \mathbb{Z}$ definované jako $\varphi : a^k \mapsto k$ je očividně izomorfismus těchto grup. Dále se tedy k G/N můžeme chovat v podstatě jako k $\mathbb{Z}$.

Ze zadání také okamžitě dostáváme přirozenou projekci $\pi : G \to G/N$, která každému prvku z G přiřazuje ten koset z G/N, ve kterém leží. Víme, že π je homomorfismus, který je na.

Nyní si vyberme libovolné přirozené číslo n. Uvažme zobrazení $\psi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, které každému celému číslu přiřadí jeho zbytek po dělení číslem n. Zobrazení ψ_n je dokonce homomorfismus, který je na.

Všechna tři právě popsaná zobrazení tedy můžeme složit, čímž získáme zobrazení $\psi_n \circ \varphi \circ \pi : G \to \mathbb{Z}_n$, které je, jakožto složení zobrazení, která jsou na, také na. Jádro tohoto zobrazení označme H. Podle první věty o izomorfismu je $G/H \simeq \mathbb{Z}_n$. Proto H vyrobí v G právě $|\mathbb{Z}_n| = n$ kosetů, což jsme přesně chtěli.

Přímočaré řešení:
Ukážeme přímočařejší řešení, které ale vyžaduje trochu víc práce. Stejně jako minule vezměme ten prvek $a = gN \in G/N$, který generuje celou G/N. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ si nyní vezměme podgrupu L grupy G/N definovanou jako $L = \{g^{nm}N \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Dále označme H grupu sestávající právě z těch prvků grupy G, které patří do nějakého kosetu ležícího v L.

Nyní z definic ověříme, že H je skutečně uzavřená na všechny grupové operace. Snadno dostáváme $e \in N = g^0 N \subset H$.

Dále ověříme uzavřenost na binární operaci. Jakmile $h_1, h_2 \in H$, máme $h_1 \in g^{nm_1}N$, $h_2 \in g^{nm_2}N$ pro nějaká přirozená m_1, m_2. Potom díky vlastnostem faktorgrupy leží prvek $h_1 h_2$ v kosetu $g^{nm_1}Ng^{nm_2}N = g^{nm_1}g^{nm_2}N = g^{n(m_1+m_2)}N$, jehož prvky ale také leží v H.

Konečně ukážeme i uzavřenost na invertování. Pokud je $h \in H$, koset hN je roven $g^{nm}N$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Dokážeme, že $h^{-1} \in g^{-nm}N \subseteq H$. Počítáním ve faktorgrupě dostáváme $h(g^{-nm}N) = hNg^{-nm}N = g^{nm}Ng^{-nm}N = g^{nm}g^{-nm}N = N$, přičemž $e \in N$. V součinu $h(g^{-nm}N)$ tedy leží identita e, takže nutně $h^{-1} \in g^{-nm}N$.

Následně je ještě třeba zdůvodnit, proč má H v G opravdu index n. Nejprve ukážeme, že kosety grupy L v grupě G/N přesně odpovídají zbytkovým třídám po dělení n. Nosná množina celé G je rovna sjednocení všech $\{g^m N \mid m \in \mathbb{Z}\}$, tyto kosety podgrupy N ji přesně rozdělují. Přitom $L, gL, g^2L, \ldots, g^{n-1}L$ jsou kosety grupy L, které pokrývají všechny kosety H, tedy celou G. Zároveň jsou různé, neboť pokud $g^i L = g^j L$, potom už $g^{i-j}L = L$, tedy i a j dávají stejný zbytek po dělení n (protože každé celé číslo jde jednoznačně vyjádřit jako součet násobku n a čísla mezi 0 a $n-1$).

Zbývá zdůvodnit, proč je také $[G : H] = n$. Podgrupa L má v G/N stejný počet kosetů, jako má její sjednocení H v celé G. Tento počet kosetů je roven n, což jsme přesně chtěli.

Poznámky:
Podotkněme, že zkonstruované podgrupy H byly v obou řešeních ve skutečnosti stejné. A ten nejjednodušší způsob, jak vše potřebné ověřit, je popsán právě v elegantním řešení. Řešení se sešel rozumný počet a většina z nich našla grupu H stejně, jako v přímočarém řešení. Tato řešení se pak typicky snažila příklad nějak dodělat. Často ale ve zdůvodnění něco chybělo, popř. v něm řešitelé udělali drobné chyby. Za to jsem typicky strhával bod. Dva řešitelé (*Danil Koževnikov* a *Jan Vavřín*) skutečně přišli na krátké a elegantní řešení, čímž si vysloužili imaginární bod.

(Jakub Löwit)

Milý příteli,

první seriálová série už je dávno za námi a my Tě vítáme u druhého dílu seriálu o teorii grup. Doufáme, že Tě první díl zaujal a že se Ti bude líbit i ten druhý. Ani pokud jsi prvnímu dílu porozuměl jen zčásti, určitě nevěš hlavu – ne vše je k pochopení zbytku potřeba. Druhý díl by určitě neměl být oproti prvnímu těžší na pochopení. Pro toho, kdo uspěšně vstřebal nejdůležitější pojmy první části, bude dokonce o dost snazší.

V seriálu se ale nacházejí i pasáže, které úplně snadné nejsou – především kapitolka o Pólyových polynomech k pochopení ostatního textu (a řešení soutěžních úloh) nutně potřeba není. Pokud se tedy v právě zmíněné části ztratíš, můžeš v klidu pokračovat dál.

Stejně jako v dílu prvním je text proložen spoustou cvičení a úloh, jejichž řešení jsou uvedena na konci. Cvičení jsou typicky lehčí a slouží k lepšímu pochopení tématu. Určitě si je tedy zkus vyřešit dřív, než si jejich řešení najdeš. Cvičení jsou na rozdíl od úloh nedílnou součástí textu, takže pokud je nevyřešíš (což není žádná tragédie, ne všechna jsou úplně snadná), přečti si jejich řešení dřív, než budeš pokračovat ve čtení.

Příjemné a zábavné čtení přejí
Filip Bialas a Kuba Löwit

Teorie grup II – Procitnutí symetrií

Group Theory is the branch of mathematics that answers the question, "What is symmetry?"
Nathan C. Carter

Prolog II

S devatenáctým stoletím přicházejí noví lidé s novými nápady a získávají trochu víc nadhledu nad tím, co se to v matematice vlastně zrovna děje. Z hlediska dějin teorie grup je klíčové, že se Cauchy intenzivně zabývá permutacemi a jako první je vnímá jako funkce (které lze skládat).

Posléze přichází mladičký francouzský matematik Galois. Navzdory velkému talentu má s přijetím na univerzitu značné potíže, neboť jeho myšlenky zkoušející nezvládají sledovat. Navíc do Francie přichází politické vlnobití, kterého se mladý Galois (ve stopách svého otce) účastní. Mezitím výrazně prohlubuje Abelovu práci – daří se mu dokonce přesně klasifikovat polynomy, jejichž kořeny se dají zapsat pomocí jejich koeficientů a základních aritmetických operací. Při tom v podstatě objevuje grupy jako takové. S vydáním své práce má ale problémy – jednou je jeho spis nepochopen, podruhé se ztratí, jindy je požádán o přepracování.

Kvůli svým politickým aktivitám se Galois dostává i do vězení (kde pokračuje ve své práci). Ve věku dvaceti let je vyzván k souboji. Příčiny jsou nejisté – mohlo jít o nešťastnou lásku, možná však byly motivy čistě politické. Noc před soubojem Galois tráví psaním dopisů, ve kterých se mimo jiné snaží sepsat celé své dílo. Druhého dne je zastřelen, v lese jej umírajícího nachází neznámý sedlák.

Během zbytku devatenáctého století přichází mnoho dalších. Klein cílevědomě spojuje grupy a geometrii, Cayley se blíží jejich abstraktní definici, podobně Burnside po něm. V Norsku plodně pracují Abelovi následovníci Sylow a Lie. Devatenácté století vrcholí důležitým počinem – vznikem naší dobře známé definice.

Návrat k normalitě

Když jsme si definovali normální grupy, mohlo se naše počínání zdát trochu podivné a náhodné. Nyní už ale máme dostatek znalostí na to, abychom normálnost lépe pochopili a docenili. Čím víc budeme grupám rozumět, tím přirozenější tento pojem bude.

Už jsme si algebraicky odvodili, že podle normálních podgrup umíme faktorizovat. Také jsme viděli, že podle žádných nenormálních podgrup faktorizovat nejde. Ukážeme si nyní mnohem kratší argument. Pokud totiž pro nějakou podgrupu $H \leq G$ umíme korektně definovat faktorgrupu G/H, dostáváme společně s ní přirozenou projekci $\pi : G \to G/H$, jejímž jádrem $\operatorname{Ker} \pi$ je přesně H. Jádra jsou ale vždy normální.

Normální jsou tedy **přesně** ty podgrupy, podle kterých můžeme faktorizovat. Podobně můžeme díky existenci faktorizací říct, že normální jsou **přesně** ty podgrupy, které jsou jádrem nějakého homomorfismu. Znalost všech normálních podgrup dané grupy G nám podle první věty o izomorfismu říká, jaké obrazy mohou mít homomorfismy z G do libovolné jiné grupy – ty jsou totiž vždy izomorfní nějaké faktorgrupě grupy G. Grupy, které mají málo normálních podgrup, jsou tedy jistým způsobem zajímavé.

Definice. Grupa G je *jednoduchá*, jestliže triviální podgrupa $\{e\}$ a celá grupa G jsou její jediné normální podgrupy.

K jednoduchým grupám ještě párkrát zabrousíme, nyní se ale podíváme na to, jak normalita souvisí s jedním speciálním typem izomorfismů.

Automorfismy a jejich grupy

Definice. *Automorfismus* grupy G je izomorfismus $\psi : G \to G$.

Automorfismy jsou tedy bijekce $G \to G$, které navíc zachovávají strukturu grupy. Každé dva automorfismy lze složit, čímž získáme opět automorfismus $G \to G$. Jak už dávno víme, skládání funkcí je asociativní. Ke každému automorfismu ψ navíc zjevně existuje inverzní automorfismus ψ^{-1}, který je pouze jeho „otočením“ a společně s ním se složí na identickou funkci $G \to G$. Identická funkce se přitom vzhledem ke skládání chová jako neutrální prvek. Všechny automorfismy grupy G tedy se skládáním tvoří grupu! Tu budeme značit $\mathrm{Aut}(G)$.

Jakkoli je tato myšlenka krásná, grupa automorfismů grupy G se obecně zkoumá dosti špatně. Naštěstí má jednu velmi bohatou podgrupu, se kterou se ještě mnohokrát setkáme – tzv. grupu vnitřních automorfismů.

Vyberme si libovolný pevný prvek $g \in G$ a definujme zobrazení $\varphi_g : G \to G$ předpisem $h \mapsto ghg^{-1}$. Víme, že obě funkce $h \mapsto gh$, $h \mapsto hg^{-1}$ jsou bijekce $G \to G$, přičemž φ_g je jejich složením (v libovolném pořadí), takže je to také bijekce $G \to G$. Co víc, pro libovolné h_1, $h_2 \in G$ platí $\varphi_g(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \varphi_g(h_1)\varphi_g(h_2)$, takže φ_g je dokonce automorfismus grupy G.

Definice. Pro libovolné $g \in G$ označíme φ_g automorfismus tvaru $h \mapsto ghg^{-1}$. Takovým automorfismům říkáme *vnitřní*.

Tyto automorfismy nazýváme vnitřní, protože je „zevnitř“ zprostředkovávají samotné prvky grupy G. Vnitřní automorfismy odpovídající různým prvkům grupy G mohou a nemusí být úplně stejné.

Identická funkce na G je zjevně vnitřním automorfismem φ_e. Automorfismy φ_g a $\varphi_{g^{-1}}$ jsou k sobě inverzní, neboť $(\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(a) = g^{-1}gag^{-1}g = a = \varphi_e(a)$. Složení $\varphi_g \circ \varphi_h$ je přitom rovné φ_{gh}, neboť $(\varphi_g \circ \varphi_h)(a) = ghah^{-1}g^{-1} = \varphi_{gh}(a)$. Tím jsme dokázali, že vnitřní automorfismy tvoří podgrupu grupy všech automorfismů grupy G.[5] Budeme ji značit $\mathrm{Inn}(G)$.

Cvičení 1. Grupa G má triviální grupu vnitřních automorfismů právě tehdy, když je abelovská.

Automorfismy přitom jakýmsi způsobem působí na celou grupu G a míchají její prvky. Protože víme, že obrazem každé grupy při jakémkoli homomorfismu je zase grupa, platí dokonce, že automorfismus zobrazí každou podgrupu grupy G na některou podgrupu G. Příslušné podgrupy navíc musejí být izomorfní. Normální podgrupy jsou **přesně** ty podgrupy $H \leq G$, se kterými žádný z **vnitřních** automorfismů ani nehne (přestože může přepermutovat jejich vnitřek). Formálněji: Grupa $H \leq G$ je normální právě tehdy, když s každým h obsahuje i $\varphi_g(h)$ pro každý vnitřní automorfismus φ_g.

Cvičení 2. Dokažte, že pro libovolnou grupu G je $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

Ještě zmíníme, co přesněji provádějí vnitřní automorfismy s prvky G.

Definice. Prvek $a \in G$ nazveme *konjugovaným* s prvkem $b \in G$, existuje-li nějaký $\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$ takový, že $\varphi_g(a) = b$.

Všimněme si, že každý prvek je konjugovaný sám se sebou díky identickému automorfismu $\varphi_e \in \mathrm{Inn}(G)$. Dále, je-li $gag^{-1} = \varphi_g(a) = b$, je také $a = g^{-1}bg = \varphi_{g^{-1}}(b)$, konjugovanost je tudíž symetrický vztah. Navíc, je-li $\varphi_h(a) = b$, $\varphi_g(b) = c$, je už také $\varphi_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = gbg^{-1} = c$. Pokud je proto a konjugovaný s b a b s c, je i a konjugovaný s c. Dohromady tedy vidíme,

[5] Dokonce jsme dokázali, že zobrazení $G \to \mathrm{Aut}(G)$, které posílá prvek $g \in G$ na φ_g, je homomorfismus, jehož obrazem je právě $\mathrm{Inn}(G)$.

že konjugovanost rozděluje všechny prvky G do disjunktních skupinek, ve kterých je každý prvek konjugovaný s každým.

Symetrické grupy a parita permutací

Celých sto let se teorie grup zabývala výhradně symetrickými grupami a s trochou nadsázky se dá říct, že celá tato teorie vznikla na a bydlí v symetrických grupách. Bylo by tedy krajně nezodpovědné neprozkoumat je trochu detailněji.

Připomeňme nejprve, že permutací množiny X myslíme zkrátka jakoukoli bijekci $X \to X$ a že symetrická grupa S_X je grupa všech těchto permutací. Dále se v tomto textu zaměříme pouze na konečné množiny X. Už jsme se bavili o tom, že libovolnou takovou permutaci umíme jednoznačně rozložit na cykly. Nyní prozkoumáme, jak takový rozklad souvisí s konjugováním.

Tvrzení. *Dvě permutace jsou v S_X konjugované právě tehdy, když mají stejnou cyklovou strukturu*[6].

Důkaz. Mějme nějakou permutaci $\sigma \in S_X$ a zkoumejme, jak vypadají permutace $\tau\sigma\tau^{-1}$ pro libovolné $\tau \in S_X$. Permutace τ, τ^{-1} jsou k sobě inverzní, permutace $\tau\sigma\tau^{-1}$ tedy nejdřív přejmenuje prvky X pomocí τ^{-1}, poté je (podle jejich nových jmen) propermutuje využitím σ a nakonec je zase přejmenuje nazpátek permutací τ. Ověřte si sami, že pokud například σ zobrazuje $1 \mapsto 2$, pak $\tau\sigma\tau^{-1}$ zobrazí $\tau(1) \mapsto \tau(2)$.

To nám říká dvě věci. Na jedné straně mají permutace σ a $\tau\sigma\tau^{-1}$ nutně mají stejnou cyklovou strukturu, pouze s jinými „popisky“, které jsou pozměněné permutací τ. Konjugované permutace tedy mají stejnou cyklovou strukturu.

Protože ale S_X obsahuje všechny permutace, můžeme na druhé straně tyto popisky vhodnou volbou τ změnit, jak se nám zachce, čímž dokážeme vyrobit libovolnou jinou permutaci se stejnou cyklovou strukturou. Každé dvě permutace se stejnou cyklovou strukturou jsou tedy konjugované.

Pokud se tedy zabýváme symetrickými grupami, konjugování odpovídá pouhému přejmenování prvků množiny X. Přejmenováváním tak získáme některé automorfismy S_X – a to právě vnitřní automorfismy této grupy. Normální podgrupy S_X jsou tedy právě ty, které s každou permutací obsahují i všechny její kamarády se stejnou cyklovou strukturou.

Kromě rozkladu na cykly umíme permutace rozložit ještě jiným, neméně zajímavým způsobem. Tento druh zápisu sice nebude jednoznačný, přesto nám toho ale o permutačních grupách hodně řekne.

Tvrzení. *Každou permutaci σ konečné množiny lze napsat jako složení konečného počtu transpozic (tj. cyklů délky dva). Parita počtu těchto transpozic přitom nezávisí na konkrétním rozkladu původní permutace.*

Důkaz. Nejprve si rozmyslíme, že nějaký takový rozklad existuje. Víme, že σ je jednoznačně určena tím, jak zamíchá prvky příslušné konečné množiny. Každé takové zamíchání přitom můžeme provést postupným prohazováním vhodných dvojiček prvků.[7] To je ale jinými slovy právě složení konečného počtu transpozic.

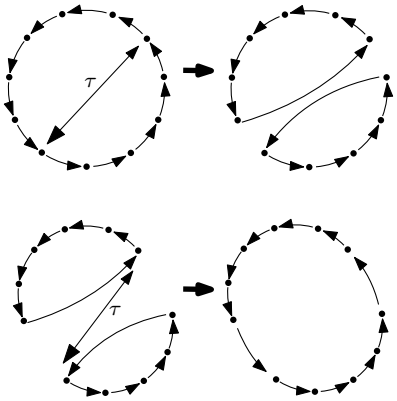
Mohli jsme postupovat i o trochu explicitněji. Permutaci σ lze rozložit na cykly, takže ji můžeme zapsat jako složení permutací odpovídajících těmto cyklům (v libovolném pořadí). Cyklus $(a_1 a_2 \dots a_k)$ přitom lze zapsat jako složení $k-1$ transpozic $(a_1 a_k) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$.

Nyní ukážeme, že parita počtu transpozic v libovolném takovém rozkladu je skutečně stejná. Na to půjdeme trošku oklikou. Dokážeme, že pokud $\sigma \in S_n$ je nějaká permutace, která sestává z m cyklů, a $\tau \in S_n$ nějaká transpozice, pak složení $\tau\sigma$ sestává z $m-1$ nebo $m+1$ cyklů (přičemž zde započítáváme i cykly délky 1). To je dobře vidět z obrázku. Pokud totiž τ prohazuje dva prvky

[6] Tj. když je počet jednocyklů v obou stejný, stejně tak i počet dvojcyklů, trojcyklů atd.

[7] To je skutečně snadné – dokonce bychom si například mohli usmyslet, že budeme prohazovat vždy dva sousední prvky.

uvnitř stejného cyklu permutace σ, tento zasažený cyklus se rozpadne na dva. Pokud naopak τ prohazuje dva prvky z různých cyklů, v permutaci $\tau\sigma$ se tyto dva cykly spojí do jednoho. V obou případech přitom všechny ostatní cykly zůstanou nezměněny.



Po vynásobení jednou transpozicí se tedy změní parita počtu cyklů v rozkladu σ. Pokud by tudíž σ měla rozklad zároveň na sudý i na lichý počet transpozic, tyto dva rozklady na sebe umíme převést vynásobením lichým počtem transpozic. Pak by ale σ musela mít ve svém jednoznačném rozkladu na cykly zároveň sudý i lichý počet cyklů, což je spor.

Díky právě dokázanému tvrzení si tedy permutace můžeme rozdělit na dva druhy – na ty, které mají ve svém libovolném rozkladu sudý počet transpozic, a na ty, které mají ve svém libovolném rozkladu lichý počet transpozic. Aby se nám o nich lépe mluvilo, budeme této vlastnosti permutace říkat *parita*.

Definice. *Parita*[8] permutace σ, kterou budeme značit $\operatorname{sign}(\sigma)$, je číslo 1 nebo -1 podle toho, jestli má σ ve svém libovolném rozkladu sudý, nebo lichý počet transpozic. Pokud je $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, říkáme, že je σ *sudá*. V opačném případě o ní mluvíme jako o *liché*.

Z důkazu předešlého tvrzení navíc vyplývá, jak paritu rychle zjistit. Pro permutace konečné množiny velikosti $n \in \mathbb{N}$ se totiž identická permutace $\mathrm{id} \in S_n$ skládá přesně z n (jednoprvkových) cyklů, přičemž je sudá. Je-li tedy n sudé, odpovídá parita libovolné permutace $\sigma \in S_n$ paritě počtu jejích cyklů. Pokud je n liché, je parita permutace opačná než parita počtu cyklů σ.

Je přirozené dívat se na sign jako na funkci z konečné grupy S_n do množiny $\{1, -1\}$. Jak se sign chová při skládání permutací? Pokud máme dvě permutace σ, τ rozložené na transpozice, jejich složení umíme okamžitě rozložit jednoduše tak, že oba rozklady napíšeme ve správném pořadí za sebe. Parita $\sigma\tau$ proto odpovídá součinu parit permutací σ a τ. Právě jsme tedy „omylem“ ověřili, že sign je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ homomorfismus z S_n do grupy $\{1, -1\}$ s běžným násobením. Ta je přitom izomorfní aditivní grupě $\mathbb{Z}_2$. Z toho pak hned vidíme, že pro libovolnou $\sigma \in S_n$ je $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$. Zřejmě také pro identickou permutaci platí $\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$.

Dalším důležitým pozorováním je, že složením dvou sudých permutací opět dostaneme sudou permutaci. Sudé permutace proto (na rozdíl od lichých) tvoří podgrupu grupy S_n. Ta si zasluhuje své vlastní jméno.

Definice. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ budeme podgrupu grupy S_n sestávající ze všech sudých permutací označovat jako *alternující grupu* A_n.

Cvičení 3. Rozmyslete si, že pro všechna přirozená n je $A_n \trianglelefteq S_n$.

[8] Někdy též *znaménko*.

Z předešlého ale vůbec není jasné, kolik je lichých a kolik sudých permutací množiny dané velikosti. Zkoušet je počítat přímo by bylo trochu nepříjemné, s našimi znalostmi je to ale hračka.

Tvrzení. *Pro přirozené $n \geq 2$ je sudých permutací v grupě S_n stejně jako lichých.*

Důkaz. Jakmile je $n \geq 2$, obsahuje S_n alespoň jednu lichou permutaci τ. Násobení zleva permutací τ je pak bijekcí na nosné množině grupy S_n. Díky vlastnostem parity ale tato bijekce páruje prvky s jinými znaménky. Tím pádem je nutně sudých permutací v S_n stejně jako těch lichých.

Pojďme to samé dokázat ještě jednou.[9] Jakmile je $n \geq 2$, je zobrazení $\operatorname{sign} : S_n \to \{-1, 1\}$ na, přičemž A_n je jeho jádrem. Podle první věty o izomorfismu $S_n/A_n \simeq \{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$, takže $[S_n : A_n] = 2$. Vzhledem k podgrupě A_n se tedy S_n rozpadá na dva kosety, a protože jsou kosety stejně velké, požadovaný výsledek je dokázaný.

Ještě než se vrhneme dál, bylo by celkem férové prozradit jednu malou pikantnost ohledně alternujících grup. Alternující grupy A_n pro $n \geq 5$ jsou totiž jednoduché, to jest nemají žádné vlastní normální podgrupy. Jednoduché grupy jsou vcelku zajímavé objekty a alternující grupy jsou jejich pěkným a ilustrativním příkladem. Důkazu jejich jednoduchosti se ale vyhneme.[10] Přesto si ale ukážeme, k čemu je něco takového dobré. V následujícím cvičení proto zkuste jednoduchosti A_n využít (posléze se ho můžete pokusit vyřešit i bez ní).

Cvičení 4. Pro $n \geq 5$ je sign jediný netriviální homomorfismus $S_n \to \{1, -1\}$.[11]

Proč vychvalujeme symetrické grupy?

To je dobrá otázka. Už několikrát jsme zmínili jejich historický význam, vůbec jsme se ale nezabývali otázkou, jaké postavení mají vůči jiným grupám. Nyní podáme odpověď – jejich postavení je výsostné.

Věta. (Cayleyho) *Každá grupa G je izomorfní některé podgrupě nějaké symetrické grupy.*

Důkaz. Nejdříve si musíme vybrat, do které symetrické grupy budeme G vnořovat. Vhodným kandidátem je S_G, grupa všech permutací nosné množiny grupy G. Nyní si musíme rozmyslet, jaké permutaci z S_G by měl odpovídat prvek $g \in G$. My už ale naštěstí známe jednu skvělou věc. Násobení zleva libovolným prvkem $g \in G$ je bijekce $G \to G$, což je nějaký prvek S_G. Zbývá dokázat, že toto trikové přiřazení opravdu vyrobí podgrupu S_G, která je izomorfní s G.

Definujme si tedy zobrazení $\psi : G \to S_G$ právě popsaným způsobem. Protože pro $g, h \in G$ odpovídají obě zobrazení $\psi(gh)$ a $\psi(g)\psi(h)$ permutaci indukované násobením prvkem gh, jsou si rovna, takže ψ je homomorfismus. Jeho jádro je přitom triviální, neboť každý prvek $g \in G$, $g \neq e$ indukuje neidentickou permutaci (například protože $ge = g$). Obraz $\operatorname{Im}\psi \leq S_G$ je proto skutečně izomorfní grupě G.

Ačkoli se to může zdát neuvěřitelné, zkoumání symetrických grup a jejich podgrup je proto stejně obecné jako zkoumání všech možných abstraktních grup. Samozřejmě bychom neměli úplně přehánět. Existují i jiné stejně „obecné“ druhy grup. Některé grupy navíc odpovídají i permutacím mnohem menších množin, než jaké nám dává právě uvedená Cayleyho věta – například na S_n se radši díváme jako na grupu všech permutací na n prvcích než jako na grupu vybraných permutací na $n!$ prvcích.

Tři, dva, jedna... Akce!

Jak jsme slibovali od začátku, grupy můžeme chápat jako „symetrie různých věcí“. Samotné symetrické grupy mají svou množinu, kterou si ve chvílích volna radostně permutují. Pokud ale dostaneme

[9] A tvařme se přitom mnohem světaznaleji.

[10] Není těžký, pouze trochu otravný. Je zkrátka potřeba dokázat, že jakmile nějaká podgrupa A_n obsahuje něco jiného než identitu, umíme invertováním, skládáním a konjugováním vyrobit kterýkoli další prvek.

[11] Jak už jsme říkali, je dvouprvková grupa $\{1, -1\}$ s násobením izomorfní grupě $\mathbb{Z}_2$.

pod stromeček nějakou abstraktní grupu, bude pro nás celkem složité představit si, symetrie čeho že nám to Ježíšek vlastně nadělil. Možná bychom měli na Štědrý večer mnohem větší radost, kdybychom dostali současně s abstraktní grupou i nějaký předmět, na jehož symetrie by prvky naší grupy pasovaly. Navíc by bylo určitě slušností dodat i návod, jak na onen předmět prvky přidělat. A právě tomu říkáme akce...

Definice. *Akcí* (nebo *působením*) grupy G na množině X nazýváme libovolný homomorfismus $\alpha : G \to S_X$.

Množina X je naším předmětem, homomorfismus α je příslušný návod k použití symetrií z grupy G. Přesto bychom si rádi představovali, že množinu X permutují přímo prvky grupy G. Zavedeme proto následující značení. Pro libovolné $g \in G$ bude α_g značit permutaci $\alpha(g) \in S_X$; pro libovolné $a \in X$ pak je $\alpha_g(a)$ ten prvek z množiny X, na který obraz prvku g při akci α posílá a.[12] Často nás budou zajímat akce, kde každé dva prvky z G představují jinou symetrii, což odpovídá podmínce $\operatorname{Ker}\alpha = \{e\}$. Takovým akcím se říká *věrné*.

Znalost nějaké akce nám obecně může být na dvě věci. Za prvé, předmět X může být ve skutečnosti trochu složitější a permutace z $\operatorname{Im}\alpha$ mohou uznávat jeho strukturu, vhodná akce je pak velmi elegantní způsob práce s jeho symetriemi. Za druhé, znalost nějaké akce grupy G nám může prozradit mnoho o ní samotné – grupu G s akcí si můžeme mnohem lépe představit, akce nám poodhalí nějaké její podgrupy, strukturu a podobně.

Pojďme si nyní ukázat, jak nějaké akce mohou vypadat. Pomineme přitom triviální akci, kdy se celá grupa zobrazí na identickou permutaci množiny X.

Příklad. Symetrická grupa S_X věrně působí zřejmým způsobem na množině X. Homomorfismus α přitom odpovídá identické funkci $S_X \to S_X$, která skutečně má triviální jádro.

Příklad. Připomeňme, že Kleinova grupa[13], kterou si označíme V, odpovídá symetriím obdélníkového listu papíru. Na definici grupy V jsme přesto žádný obdélník ani symetrie nepotřebovali, prvky grupy V jsou „prostě jen písmena“. Naštěstí ale existuje pěkná věrná akce $\alpha : V \to S_4$, která prvky V zobrazí na jisté permutace čtyř vrcholů obdélníku. Dokonce jsou to právě ty permutace, po jejichž provedení dostaneme opět obdélník (tj. právě jeho symetrie).

Příklad. Podobně vidíme, že dihedrální grupa[14] D_{2n} věrně působí na n-tici vrcholů pravidelného n-úhelníka. To nám o ní například prozrazuje, že ji lze nagenerovat dvěma prvky – nejmenší rotací a jednou reflexí, popřípadě dvěma vedlejšími reflexemi[15]. Okamžitě také vidíme, že obsahuje cyklickou podgrupu R generovanou nejmenší rotací, neboť R obsahuje právě všechny přímé[16] symetrie n-úhelníka, což jsou shodou okolností přesně ty symetrie, v jejichž libovolném zápisu je sudý počet reflexí. Parita počtu reflexí se navíc ani po konjugaci libovolným prvkem nezmění, takže $R \trianglelefteq D_{2n}$.

Další velmi přirozené akce všech možných grup potkáme později.

Burnsideovo lemma

Nyní se budeme snažit zkoumat symetrické objekty pomocí akcí grup jejich symetrií. Začneme dvěma užitečnými pojmy.

Definice. Mějme akci α grupy G na množině X. Pro libovolný prvek $a \in X$ pak definujeme

(1) *stabilizátor* G_a jako množinu těch prvků $g \in G$, pro které je $\alpha_g(a) = a$;
(2) *orbitu* $\mathcal{O}(a)$ jako množinu těch $b \in X$, pro které existuje $h \in G$ splňující $\alpha_h(a) = b$.

[12] Značení akcí velmi často záleží na konkrétní literatuře a kontextu, každé má své výhody a nevýhody. My se budeme držet toho právě zavedeného.

[13] Viz první díl seriálu, kapitola *Příklady grup*.

[14] Tamtéž.

[15] Vedlejšími myslíme osové symetrie, jejichž osy svírají nejmenší možný kladný úhel.

[16] Tj. bez zrcadlení.

Je snadné si uvědomit, že stabilizátor libovolného prvku $a \in X$ je podgrupou G. Skutečně: $\alpha_e(a) = a$, rovnost $\alpha_g(a) = a$ použitím $\alpha_{g^{-1}}$ přechází v $a = \alpha_{g^{-1}}(a)$, a nakonec, pokud $g, h \in G_a$, okamžitě dostáváme $\alpha_{gh}(a) = \alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_g(a) = a$.

Orbity jsou naopak podmnožiny X, které ji rozdělují na disjunktní části. Pro každé $a \in X$ díky identitě platí $a \in \mathcal{O}(a)$. Pokud dále α_g posílá $a \mapsto b$, inverzní bijekce $\alpha_{g^{-1}}$ vrací $b \mapsto a$. Dále vidíme, že když $\alpha_g : a \mapsto b$ a $\alpha_h : b \mapsto c$, pak složené zobrazení α_{gh} posílá $a \mapsto c$. Dohromady jsme tedy ukázali, že každý prvek $a \in X$ je v nějaké orbitě a orbity každých dvou různých prvků jsou buď stejné, nebo disjunktní.

Když místo celé množiny X uvážíme pouze některou orbitu (případně sjednocení libovolného počtu z nich), lze mluvit o akci G na této menší množině – příslušné permutace zkrátka zúžíme jen na vybrané orbity. Na jiných podmnožinách $Y \subset X$ naopak G takto působit nemůže, neboť by naše permutace některé prvky posílaly ven z Y. Základními kousky nějaké akce grupy G jsou tedy přesně tyto menší akce na jejích jednotlivých orbitách, jejichž „slepením“ získáme původní akci. Takové akce mají své jméno.

Definice. Akce se nazývá *tranzitivní*, jestliže má jedinou orbitu.

Jak už jsme uvedli, je zúžení akce na kteroukoliv orbitu $\mathcal{O}(a)$ tranzitivní akcí. Tranzitivní akce se chovají vcelku krotce. Především mají všechny prvky stejně velký stabilizátor. Vezmeme-li totiž dva prvky $a, b \in X$, z tranzitivity existuje $g \in G$, které posílá $a \mapsto b$. Díky tomuto vztahu ale snadno dostáváme ekvivalenci $h \in G_b \iff \alpha_h(b) = b \iff \alpha_h(\alpha_g(a)) = \alpha_g(a) \iff \alpha_{g^{-1}}\alpha_h(\alpha_g(a)) = a \iff \alpha_{g^{-1}hg}(a) = a \iff g^{-1}hg \in G_a$. Tím jsme tedy odvodili množinovou rovnost $G_a = g^{-1}G_b g$.

Obecně je velmi snadné najít vztah mezi velikostí nějaké orbity, velikostí stabilizátoru jejího libovolného prvku a velikostí působící grupy G.

Tvrzení. *Mějme akci α grupy G na množině X. Potom pro libovolné $a \in X$ platí $|\mathcal{O}(a)| = [G : G_a]$.*

Důkaz. Vezměme libovolné $g \in G$ a odpovídající koset gG_a. Libovolný prvek gk tohoto kosetu (kde $k \in G_a$) pak na prvek a působí stejným způsobem jako g, neboť $\alpha_{gk}(a) = \alpha_g(\alpha_k(a)) = \alpha_g(a)$. Pokud jsou naopak kosety gG_a, hG_a různé, prvek $g^{-1}h$ nepatří do G_a, takže $\alpha_{g^{-1}h}(a) \neq a$, což po provedení α_g dává $\alpha_h(a) \neq \alpha_g(a)$. Různá posunutí prvku a v rámci jeho orbity tedy odpovídají jednotlivým kosetům podgrupy G_a – těchto posunutí (prvků $\mathcal{O}(a)$) je proto přesně $[G : G_a]$.

Speciálně jsme si tím znovu ukázali, že velikosti stabilizátorů všech prvků z jedné orbity jsou stejné. Nyní už akce známe dost na to, abychom si ukázali známé Burnsideovo lemma.

Věta. (Burnsideovo lemma) *Ať α je akce konečné grupy G na konečné množině X. Počet orbit této akce na množině X označme Ω. Potom platí*

$$\Omega = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in X} |G_a|.$$

Důkaz. Rovnost můžeme upravit do tvaru

$$\Omega \cdot |G| = \sum_{a \in X} |G_a|.$$

Toto nyní nahlédneme kombinatoricky. Číslo Ω odpovídá počtu orbit naší akce, pokud si tedy z každé orbity $\mathcal{O}(a)$ vybereme právě jednoho zástupce a, bude těchto zástupců přesně Ω. Na každý z těchto vybraných prvků nyní vypustíme všechny prvky G, čímž dostaneme celkem $\Omega|G|$ ne nutně různých prvků množiny X. Levá strana dokazované rovnosti proto představuje jeden způsob, jak spočítat, kolik prvků jsme dostali. Ukážeme, že i suma na pravé straně představuje počet získaných prvků.

Každý z našich Ω vybraných zástupců dostaneme právě tolikrát, jaká je velikost jeho stabilizátoru v grupě G. Na každé z orbit působí grupa G tranzitivně, neboli každý prvek $b \in \mathcal{O}(a)$ dostaneme jako $\alpha_g(a)$ pro nějaké $g \in G$. Co víc, v rámci důkazu předchozího tvrzení jsme si rozmysleli, že prvek $b = \alpha_g(a)$ dostaneme přesně $|G_a|$-krát. To je ale podle předešlého tvrzení přesně velikost jeho stabilizátoru G_b. Levá strana je tedy skutečně rovna součtu velikostí stabilizátorů všech prvků, tj. sumě na pravé straně. Tím je důkaz dokončen.

Při praktickém použití této věty, o kterém se dočtete v příští kapitole, se často hodí dívat se na pravou stranu trochu jinak. Suma na pravé straně odpovídá počtu všech dvojiček $g \in G$ a $x \in X$ takových, že α_g fixuje[17] x. Můžeme ji proto dostat také sčítáním počtů takových x přes všechny prvky $g \in G$.

Počítání náhrdelníků

Burnsideovo lemma je velmi elegantní a často z něj vyplývají další zajímavá obecná tvrzení, ještě častěji nám ale pomůže počítat velmi konkrétní věci. Představme si následující situaci. Popelka dostala od macechy nepříjemný úkol, který ji má zákeřně připravit o návštěvu plesu. Macecha totiž z hrášku, čočky, rýže a lecčeho dalšího, co jí přišlo pod ruku, vyrobila všechny možné kruhové náramky. Popelka má za úkol spočítat, kolik druhů náramků na zemi leží. Holoubci jsou bohužel z takové směsi trochu zmatení; mají problém poznat, které náramky jsou stejné, a které nikoli. Co by mohlo zoufalé Popelce pomoci? Burnsideovo lemma!

Množina X nyní nebude popisovat vnitřní struktury nějakého objektu, místo toho v ní budou ležet všechna „nakreslení“ našich barevných náramků. Akce vhodné grupy G pak bude říkat, které obrázky zachycují stejný náramek. Zvolíme ji totiž tak lišácky, aby dva obrázky zachycovaly stejný náramek právě tehdy, když budou ležet ve stejné orbitě. Znalost počtu všech obrázků a grupy G nám společně s Burnsideovým lemmatem přesně řekne, kolik různých náramků na zemi leží.

Pojďme si to tedy zkusit na příkladech.

Příklad. Mějme sedm černých a šest bílých korálků. Kolik různých náramků z nich lze vyrobit, musíme-li použít všechny? Dva náramky považujeme za různé, pokud je na sebe nelze převést pohybováním v prostoru.

Řešení. Zajímáme se o nějaké náramky délky 13. Dva náramky podle zadání považujeme za stejné právě tehdy, když na sebe jejich nakreslení lze převést pomocí nějakých rotací a reflexí. Jinými slovy, počet takových náramků je přesně roven počtu orbit při očividné akci grupy D_{26} na množině všech třináctiúhelníků se sedmi černými a šesti bílými vrcholy. Tato množina má $\binom{13}{7}$ prvků.[18] Identická permutace fixuje právě všech $\binom{13}{7}$ prvků. Protože je ale 13 prvočíslo, žádná jiná rotace žádný různobarevný náramek fixovat nemůže. A konečně každá z osových symetrií fixuje přesně ty náramky, které jsou symetrické podle příslušné osy. Snadno si rozmyslíme, že těch je $\binom{6}{3}$. Z Burnsideova lemmatu dostáváme celkem $\frac{1}{26}\left(\binom{13}{7} + 12 \cdot 0 + 13 \cdot \binom{6}{3}\right)$ různých náramků.

Cvičení 5. Mějme hromadu modrých, zelených, červených a růžových korálků. Kolik existuje různých náhrdelníků z přesně patnácti takových korálků? Dva náhrdelníky považujeme za různé, pokud je na sebe nelze převést pohybováním v prostoru.

Cvičení 6. Mějme nekonečnou čtvercovou mřížku obarvenou černou a bílou. Přitom víme, že pro každé celé x, y mají políčka se souřadnicemi $[x, y+9], [x, y-9], [x+9, y]$ a $[x-9, y]$ stejnou barvu jako políčko se souřadnicemi $[x, y]$. Kolik takových obarvení roviny existuje? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se liší pouze posunutím.

[17] Tímto slovem myslíme, že se daný prvek v daném zobrazení zobrazí sám na sebe.

[18] Použitý symbol představuje tzv. *kombinační číslo*, což je velmi důležitý pojem z kombinatoriky. Kdo se s ním ještě nepotkal, snadno si ho dohledá.

Výsledky předchozích cvičení velmi závisely na prvočíselném rozkladu zadaných čísel, což není náhoda. Podobným způsobem bychom mohli vyřešit mnoho dalších příkladů. Zkusme si nyní něco zajímavějšího. V následující úloze totiž bude potřeba lišácky vybrat množinu i působící grupu.

Úloha 1. Ať m, n jsou libovolná přirozená čísla. Dokažte, že potom číslo n dělí součet[19]

$$\sum_{i=1}^{n} m^{\mathrm{NSD}(n,i)},$$

kde $\mathrm{NSD}(a,b)$ značí největšího společného dělitele čísel a, b.

Pólyovy poly(a)nomy

Ještě než opustíme kouzelný svět Burnsideova lemmatu, ukážeme si jeho zobecněnou verzi. Už umíme snadno spočítat, kolik různých náhrdelníků pevné délky dostaneme kombinováním neomezeného počtu korálků různých barev. Také umíme spočítat, kolik náhrdelníků dostaneme použitím přesně daných počtů korálků jednotlivých barev. Pro jiné rozložení barev korálků bychom ale museli celou úlohu řešit znovu. Pólyova věta nám říká, jak takovou úlohu vyřešit pro všechna možná rozložení barev naráz.

Definice. Mějme grupu $G \leq S_X$ pro nějakou konečnou množinu X velikosti n. Pak *polyanomem*[20] prvku $g \in G$ nazveme polynom $P_g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$, kde x_i jsou proměnné a q_i značí počet cyklů délky i v permutaci g.

Všimněme si, že pro přehlednost nemluvíme o obecných akcích, ale rovnou o podgrupách konečných symetrických grup. Nebyl by samozřejmě problém vše definovat i pro obecné akce, pro své potřeby bychom tím ale vůbec nic nezískali. Jakmile máme polyanom pro jeden prvek grupy, nic nám nebrání všechny takové polyanomy sečíst.

Definice. Mějme grupu $G \leq S_X$ pro nějakou konečnou množinu X velikosti n. *Polyanomem*[21] grupy G pak nazveme polynom

$$P_G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_g(x_1, \ldots, x_n).$$

Zdůrazněme, že opět pracujeme pouze s konečnými grupami, tyto definice proto dávají dobrý smysl. Polyanom P_G přitom jakýmsi prazvláštním způsobem zachycuje, jakou strukturu mají permutace z G.

V duchu předchozích úloh o barvení nyní budeme chtít barvit kousky (korálky) nějakého většího celku (náhrdelníku), který má jakousi složitější vnitřní strukturu (korálky jsou na provázku). Tuto vnitřní strukturu odráží nějaká vhodně zvolená grupa G. Na barvený předmět se tedy díváme pouze jako na množinu X barvených kousků (korálků), které budeme barvit pomocí barev z konečné množiny C. To nám dává soubor všech možných obarvení množiny X, kterých je $|C|^{|X|}$; ten příhodně označíme C^X. Některé prvky C^X ale odpovídají stejnému předmětu. Grupa G současně působí na C^X tak, že prohazuje barvy jednotlivých prvků z X. Stačí tedy zvolit G tak, aby různé předměty odpovídaly různým orbitám, a nechat ji zapůsobit.

Úmluva. Ať X je konečná množina, $G \leq S_X$ a C konečná množina barev. Potom označme β akci grupy G na množině C^X, kde pro $g \in G$ prvek β_g přiřazuje nějakému obarvení $a \in C^X$ to obarvení $\beta_g(a) \in C^X$, v němž je každý prvek $x \in X$ obarven tou barvou, kterou je obarven jeho

[19] Ten lze pomocí Eulerovy funkce φ zapsat i jako $\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) m^d$.

[20] Jak už si čtenář možná všiml, autoři mají zálibu v hrátkách se slovy. Tento pojem se běžně nepoužívá.

[21] V běžné literatuře se vyskytuje termín *cyklický index*.

vzor při permutaci g v obarvení a. (Lidsky řečeno: Vždycky vezmeme obarvený předmět a pustíme na něj permutaci g.)

Doteď jsme jen (dost formálně) shrnuli to, co už jsme dávno sami od sebe dělali v minulé sekci. Naším cílem je nyní vyjádřit, kolik různě obarvených předmětů dostaneme z kterého rozložení barev.

Definice. Mějme množinu C sestávající z k barev $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Potom si pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ označme $g_i = c_1^i + c_2^i + \cdots + c_k^i$, kde všechna c_i vnímáme jako proměnné.

Na první pohled se může zdát naše počínání trochu pomatené, ne-li podezřelé. Jak mohou být barvy zároveň proměnné? Naše polyanomy ale nebudou určené k tomu, aby se do nich nedej bože něco dosazovalo. Jedná se o takzvané *formální* polynomy. Budeme pouze zkoumat, co se děje s jejich koeficienty při různých výpočtech.

Věta. (Pólyova) *Ať X je nějaká konečná množina velikosti n, $G \leq S_X$. Prvky X obarvujme barvami z $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$, soubor všech takových obarvení označme C^X. Počet těch orbit akce β grupy G na množině C^X, jejichž prvky využívají barvu c_i přesně r_i-krát pro $i \in \{1, \ldots, k\}$, je pak roven koeficientu u členu $c_1^{r_1} \cdots c_k^{r_k}$ v polyanomu $P_G(g_1, \ldots, g_n)$.*

Důkaz. Pro libovolná taková r_i tedy musíme dokázat rovnost koeficientu u členu $c_1^{r_1} \cdots c_k^{r_k}$ v polynomu $P_G(g_1, \ldots, g_n)$ a počtu orbit akce β, jejichž prvky využívají barvu c_i přesně r_i-krát pro každé i. Označme pro přehlednost $R(g_1, \ldots, g_n) = |G| \cdot P_G(g_1, \ldots, g_n)$.

Zkoumejme dále akci β pouze na množině Y sestávající z těch obarvení z C^X, která obsahují právě r_i prvků barvy c_i pro každé i. Tuto ořezanou akci označme β' – to dobře definovaná akce, neboť Y je sjednocením některých orbit akce β. Díky Burnsideovu lemmatu nám pak stačí ukázat, že koeficient l u členu $c_1^{r_1} \cdots c_k^{r_k}$ v polynomu $R(g_1, \ldots, g_n)$ je roven součtu velikostí všech stabilizátorů této akce β'.

To je ale to samé jako tvrdit, že koeficient l je roven sumě $\sum_{g \in G} F(g)$, kde $F(g)$ značí počet prvků množiny Y, jež jsou fixovány permutací β'_g. Poslední zmíněnou rovnost nahlédneme dokonce trochu jemněji. Ukážeme, že číslo $F(g)$ je rovno koeficientu u $c_1^{r_1} \cdots c_k^{r_k}$ v polyanomu $P_g(g_1, \ldots, g_n)$. Tím budeme hotovi, neboť máme za úkol dokázat rovnost pro součty takových výrazů přes všechna $g \in G$, přičemž $R(g_1, \ldots, g_n)$ je přesně součet $P_g(g_1, \ldots, g_n)$ přes všechna $g \in G$.

Z definice polyanomu prvku máme $P_g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$, kde q_i značí počet cyklů délky i v permutaci g. Které prvky množiny C^X taková permutace fixuje? Přesně ty, které mají v každém jejím cyklu všechny prvky obarvené stejnou barvou.[22] Nás ale zajímá, kolik fixuje prvků pouze z množiny Y.

Dosazení polynomů $g_i = c_1^i + \cdots + c_k^i$ za x_i kombinatoricky odpovídá tomu, že každý cyklus zkoušíme obarvit každou barvou. Přesněji, za každé x_i dosazujeme polynom $g_i = c_1^i + \cdots + c_k^i$. Než roznásobený polynom upravíme sčítáním, je před každým členem koeficient 1. Otázkou je proto pouze to, kolikrát který člen při roznásobování dostaneme. Za každý cyklus permutace g je navíc v součinu právě jeden činitel. Samotné roznásobování přitom probíhá tak, že z každé závorky tvaru $(c_1^i + \cdots + c_k^i)$ vybereme jeden člen, což kombinatoricky odpovídá obarvení všech i prvků daného cyklu permutace g vybranou barvou. Různých obarvení, která pro všechna i využívají barvu c_i přesně r_i-krát, je pak právě tolik, kolik po roznásobení dostaneme členů $c_1^{r_1} \cdots c_k^{r_k}$. To je po úpravě rovno koeficientu u tohoto členu.

Pojďme nyní okusit sladké plody své dosavadní práce na příkladě. Ten by byl určitě řešitelný i méně pokročilými metodami, znalost polyanomů ho ale mnohonásobně zpřehlední. Navíc tím dostáváme návod, jak řešit mnohem komplikovanější příklady.

Příklad. Uvažme všechny různé grafy[23] na čtyřech nerozlišitelných vrcholech. Jeden z nich si

[22] Takových prvků je $k^{q_1 + \cdots + q_n}$.

[23] Kdo neví, co je to *graf*, nemusí zoufat. Odpověď snadno nalezne třeba v PraSečím seriálu *Letem grafovým světem*.

náhodně vybereme. Jaká je pravděpodobnost, že má počet hran dělitelný dvěma?

Řešení. Spočteme tedy počet všech takových grafů a počet všech grafů se sudým počtem hran. Graf B na n vrcholech je jednoznačně určen výčtem hran, které má. Možných hran je přitom $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. To, jestli hrana leží v B, nebo ne, můžeme vzájemně jednoznačně reprezentovat pomocí obarvování – hrany z B budou černé, ty ostatní bílé. Označme proto X množinu všech možných hran, dále ať $C = \{a, b\}$ je dvouprvková množina barev.

Dva grafy přitom považujeme dle zadání za stejné, lze-li vrcholy jednoho převést na vrcholy druhého permutací, která zachovává hrany – tj. spojené dvojice vrcholů zobrazuje na spojené, nespojené na nespojené. Hledáme tedy nějakou podgrupu $G \leq S_m$, jejíž orbity by stejnost grafů vystihovaly.

Vezmeme-li libovolnou permutaci vrcholů $g \in S_n$, získáme z ní jednoznačně určenou permutaci hran $\varphi(g) \in S_m$, která posílá hranu mezi vrcholy u, v na hranu mezi vrcholy $g(u), g(v)$. Přitom φ je prostý homomorfismus, takže $\operatorname{Im}\varphi \leq S_m$.

Označme $G = \operatorname{Im}\varphi$. Orbity příslušné akce β grupy S_n na množině C^X pak ale přesně odpovídají různým grafům na čtyřech nerozlišitelných vrcholech. Dva grafy B, B' s nerozlišitelnými vrcholy jsou stejné právě tehdy, když existuje permutace vrcholů $g \in S_n$, která zachovává hrany, tj. právě tehdy, když existuje permutace $h \in \operatorname{Im}\varphi$, která posílá barevnou reprezentaci B v množině C^X na barevnou reprezentaci B' v množině C^X.

Doteď jsme pracovali obecně pro libovolné pevné n. Tak bychom samozřejmě mohli pokračovat, raději se ale vrátíme ke konkrétnímu případu $n = 4$. Nejprve musíme spočítat polyanom grupy $\operatorname{Im}\varphi \leq S_6$, která obsahuje $24 = |S_4|$ prvků. Pro S_4 přímo víme, jaké „druhy“ prvků obsahuje: identitu, 6 transpozic, 3 dvojtranspozice, 8 trojcyklů a 6 čtyřcyklů. My ale hledáme polynom grupy $\operatorname{Im}\varphi$. S tužkou a papírem si není těžké rozmyslet, že φ zobrazuje identitu na identitu, transpozici na dvojtranspozici, dvojtranspozici také na dvojtranspozici, trojcyklus na dva trojcykly a čtyřcyklus na čtyřcyklus s transpozicí. Dostáváme proto polyanom

$$P_{\operatorname{Im}\psi}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}\left(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4\right).$$

Zbývá dosadit $x_i = g_i = a^i + b^i$ a podívat se na správné koeficienty. Dostáváme polynom

$$\begin{aligned}(a,b) &= \frac{1}{24}\left((a+b)^6 + 9(a+b)^2(a^2+b^2)^2 + 8(a^3+b^3)^2 + 6(a^2+b^2)(a^4+b^4)\right) = \\ &= a^6 + a^5b + 2a^4b^2 + 3a^3b^3 + 2a^2b^4 + b^5a + b^6.\end{aligned}$$

Pokud tedy třeba b značí černou a a bílou, máme celkem $1 + 2 + 2 + 1 = 6$ různých grafů se sudým počtem hran. Počet všech grafů je naopak roven součtu koeficientů, což je 11. Hledaná pravděpodobnost je proto $\frac{6}{11}$.

Předchozí příklad chvilku zabral, zejména protože jsme důkladně zdůvodňovali, co děláme. Vlastní výpočet byl ale poměrně krátký a efektivní.

Cvičení 7. Kolik existuje různých pravidelných čtyřstěnů v prostoru, jejichž hrany jsou obarveny azurovou a blankytnou? Kolik takových čtyřstěnů má modrých hran stejně jako blankytných? A co jiná rozložení barev?

Ačkoli to tak na první pohled vůbec nemusí vypadat, Pólyova věta se v „běžném životě“ opravdu hodí. Jedná se o velmi praktický nástroj například při určování počtů různých druhů chemických sloučenin. Podobně má důsledky i při zkoumání hudebních akordů. A to ani nemluvíme o všech možných použitích při různých kombinatorických a algebraických výpočtech, kterých jsme byli svědky před chvílí.

Akce grupy na sobě samé

V předešlých částech jsme si předvedli, jak nám akce G na X může říci hodně jak o grupě G, tak o předmětu X. Co ale využít obě výhody akce naráz a použít ji na grupu samotnou? Takové akce jsou velmi přirozené a dokonce jsme se s nimi už nevědomky setkali...

Definice. Mějme grupu G. Působení grupy G *translací* na sobě samé je akce $\alpha : G \to S_G$, která prvku g přiřazuje permutaci z S_G odpovídající násobení zleva prvkem g v grupě G.

Přitom je třeba si uvědomit, že takto definovaná α je skutečně akcí, tedy homomorfismem $G \to S_G$. Už víme, že násobení zleva prvkem g je skutečně permutace množiny G. Pokud jsou $g, h \in G$, chceme ukázat $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$. Levá strana odpovídá té permutaci z S_G, která násobí prvky G zleva prvkem gh. Pravá strana zase odpovídá té permutaci, která vznikne složením násobení zleva prvkem h a násobením zleva prvkem g v tomto pořadí. Tyto dvě permutace jsou ale díky asociativitě operace $\cdot$ v grupě G stejné, což jsme přesně chtěli.

Tuto akci jsme již před časem nevědomky potkali. Je to přesně ten homomorfismus z Cayleyho věty, který vnořuje libovolnou grupu G do příslušné symetrické grupy S_G. Jde o věrnou akci.

Všimněme si, že toto lze obecněji provádět pro kosety nějaké pevné podgrupy $H \leq G$.

Definice. Mějme grupy $H \leq G$. Označme X množinu všech levých kosetů H v G. Působením grupy G *translací* na množině X rozumíme akci $\alpha : G \to S_X$, která prvku $g \in G$ přiřazuje permutaci z S_X určenou násobením kosetů zleva prvkem g.

Opět bychom si měli zkontrolovat, že takto definovaná α je opravdu akce. Protože prvek $g \in G$ permutuje prvky G a koset zobrazí na koset, permutuje i kosety. To, že je α homomorfismus, opět plyne z asociativity $\cdot$ v grupě G. Vůbec ale není jasné, zda je taková akce věrná, či nikoli. To záleží na konkrétní volbě G a H.

Pojďme si ukázat, jak nám mohou nabyté znalosti pomoci s na první pohled velmi nepřístupnými úlohami.

Věta. *Ať G je nekonečná jednoduchá grupa. Potom v ní neexistuje vlastní*[24] *podgrupa $H < G$ s konečným indexem.*

Důkaz. Ať pro spor taková H existuje. Provedeme drobné kouzlo. Uvažme působení α grupy G translací na množině X všech levých kosetů grupy H. Podívejme se na $\operatorname{Ker}\alpha$. Je-li $g \in \operatorname{Ker}\alpha$, musí α_g fixovat všechny kosety podgrupy H. Musí proto fixovat také H samotnou, odkud $gH = H$. To ale speciálně znamená $g = ge \in H$. Tím pádem máme $\operatorname{Ker}\alpha \leq H$, přičemž H je podle předpokladu vlastní podgrupa G. Takže nutně musí být $\operatorname{Ker}\alpha < G$. Jádra jsou ale normální, takže $\operatorname{Ker}\alpha \trianglelefteq G$. Protože $\operatorname{Ker}\alpha \neq G$ a G je jednoduchá, je už pak nutně $\operatorname{Ker}\alpha$ triviální, takže α je prosté. Potom je ale $G \simeq \operatorname{Im}\alpha \leq S_X$, jenže $|S_X| = [G : H]!$; tím jsme vnořili nekonečnou G do konečné S_X, což zřejmě nejde.

Podobně jako jsme definovali působení translací, které mluví o permutacích vytvořených násobením prvky grupy g zleva, můžeme si zavést akci, která bude říkat něco o konjugování.

Definice. Mějme grupu G. Působením G *konjugací* na sobě samé myslíme akci $\varphi : G \to S_G$, která prvku g přiřazuje permutaci danou konjugováním prvkem g.

Tuto akci už jsme také potkali. Permutace φ_g přiřazená prvku g je totiž přesně vnitřní automorfismus daný tímto prvkem. Přiřazení φ je skutečně homomorfismus, což opět vyplývá z asociativity binární operace $\cdot$ na grupě G.

Před nějakou dobou jsme také potkali pojem konjugovaných prvků a ukázali si, že konjugace rozděluje prvky grupy G do skupinek, ve kterých jsou spolu každé dva navzájem konjugované. To je nyní zřejmé, neboť to jsou přesně orbity akce φ_g.

Navíc jsme už viděli, že vnitřní automorfismy zobrazují podgrupy na podgrupy a normální podgrupy přitom nechávají na místě. Speciálně, je-li $H \leq G$, potom G působí konjugací na množině podgrup konjugovaných s H. Tyto vlastnosti konjugování ještě bohatě využijeme při práci se *Sylowovými větami*, které elegantně mluví o vnitřní struktuře konečných grup.

[24] *Vlastní* je taková podgrupa H, která se nerovná celé grupě G, tj. symbolicky $H \leq G$, $H \neq G$. Tuto skutečnost značíme přirozeným způsobem jako $H < G$.

Než přejdeme k dalším tématům, zadáme si jednu pěknou a notně trikovou úlohu, která s působením konjugací úzce souvisí.

Úloha 2. Ať G je konečná grupa, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ nějaká její podmnožina. Dále víme, že každý prvek $g \in G$ je v G konjugovaný s nějakým prvkem množiny A. Dokažte, že $G = \langle A \rangle$.

Direktní součin

V matematice se často hodí uvažovat uspořádané n-tice nějakých čísel – třeba když chceme popisovat body v rovině či v prostoru. Nabízí se otázka, zda by uspořádané n-tice prvků, kde by v každé složce byly prvky nějaké grupy, náhodou netvořily novou grupu. Není těžké vidět, že tomu tak skutečně je.

Definice. *Direktním součinem* grup G, H rozumíme grupu $G \times H$ uspořádaných dvojic (g, h), kde $g \in G, h \in H$. Dva prvky násobíme tzv. po složkách: $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$, kde v první složce používáme operaci z grupy G a ve druhé operaci z grupy H.

Rychle si rozmyslíme, že se opravdu jedná o grupu. Operace bude asociativní, protože jsou původní operace asociativní. Neutrálním prvkem bude zřejmě (e, e), kde v první složce je neutrální prvek G a v druhé neutrální prvek H. Jelikož ale ze zápisu jednoznačně poznáme, o který neutrální prvek se jedná, můžeme je značit pro zjednodušení zápisů oba stejně. Inverzním prvkem k (g, h) bude (g^{-1}, h^{-1}).

Není těžké tuto definici rozšířit na více než dvě grupy. Zavedeme též přirozené značení $G^n = G \times G \times \cdots \times G$, kde G násobíme samo se sebou n-krát.

Příklad. Vektory v klasickém prostoru $\mathbb{R}^3$ spolu se sčítáním vyhovují naší definici jako prvky grupy $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Cvičení 8. Nechť G', H' jsou podgrupy G, H. Rozmyslete si, že $G' \times H'$ je podgrupa $G \times H$.

Grupy G, H dostaneme přirozeným způsobem jako podgrupy $G \times H$. Jednoduše vidíme, že $G \simeq G \times \{e\} \leq G \times H$; stačí nám ztotožnit každý prvek g grupy G s prvkem (g, e) grupy $G \times H$. Obdobně můžeme vidět, že H je izomorfní podgrupě $\{e\} \times H$. Označme tyto podgrupy jako $\tilde{G}, \tilde{H}$. Není těžké ukázat, že se jedná dokonce o normální podgrupy $G \times H$ – můžete si to zkusit jako cvičení:

Cvičení 9. Nechť G, H jsou grupy. Pak $\tilde{G}$ i $\tilde{H}$ jsou normální podgrupy $G \times H$.

Navíc vidíme, že platí $\tilde{G} \cap \tilde{H} = \{(e, e)\}$ a $\tilde{G}\tilde{H} = G \times H$. Proč to tu ale tak dlouho rozebíráme? Ukážeme, že platí i v jistém smyslu opačné tvrzení. Zatím jsme se totiž na problém koukali jen jako na skládání menších grup, ale bylo by fajn, kdybychom zvládli někdy i o nějaké větší grupě zjistit, že je izomorfní direktnímu součinu nějakých menších. A k tomu se nám bude hodit následující tvrzení:

Tvrzení. *Nechť G je grupa a K, H dvě její normální podgrupy takové, že $K \cap H = \{e\}, KH = G$. Pak $G \simeq K \times H$.*

Důkaz. Víme, že $KH = G$. Každý prvek $g \in G$ můžeme tedy zapsat jako $g = kh$, kde $k \in K, h \in H$. Dokážeme nejdříve, že je tento zápis jednoznačný. Nechť $g = k_1 h_1 = k_2 h_2$; pak $k_2^{-1} k_1 = h_2 h_1^{-1}$. Na levé straně je prvek podgrupy K, na pravé podgrupy H – jediný prvek ležící v obou podgrupách je ale e. Takže nutně $k_2^{-1} k_1 = e = h_2 h_1^{-1}$, z čehož dostáváme $k_2 = k_1, h_2 = h_1$. Proto je tento zápis skutečně jednoznačný.

Uvažujme nyní zobrazení $\varphi : K \times H \to G$ takové, že $\varphi((k, h)) = kh$. Rádi bychom ukázali, že je toto zobrazení izomorfismus. Jistě se jedná o zobrazení na, neboť $G = KH$, a z předchozího odstavce plyne, že je i prosté. Stačí nám tedy ukázat, že se jedná o homomorfismus. Uvažme libovolné dva prvky $(k_1, h_1), (k_2, h_2)$ grupy $K \times H$. Potom $\varphi((k_1, h_1)(k_2, h_2)) = \varphi((k_1 k_2, h_1 h_2)) = k_1 k_2 h_1 h_2$, zatímco $\varphi((k_1, h_1))\varphi((k_2, h_2)) = k_1 h_1 k_2 h_2$. Chceme tedy ukázat, že $k_1 k_2 h_1 h_2 = k_1 h_1 k_2 h_2$. To lze přepsat jako $k_2 h_1 = h_1 k_2$ neboli $k_2 h_1 k_2^{-1} h_1^{-1} = e$. Ukážeme-li, že výraz na levé straně patří do H i do K, víme už, že se nutně musí rovnat e. Jelikož je H normální, dostaneme konjugací h_1 prvkem

k_2 prvek z H a vynásobením prvkem h_1^{-1} znovu prvek z H. Obdobně z normality K máme, že $h_1 k_2^{-1} h_1^{-1} \in K$, takže i $k_2(h_1 k_2^{-1} h_1^{-1}) \in K$, jak jsme chtěli ukázat. Dokázali jsme tedy, že je φ homomorfismus, a tím i izomorfismus.

Cvičení 10. Ukažte, že grupa $\mathbb{Q}^\times$ všech racionálních čísel kromě nuly s násobením je izomorfní direktnímu součinu $\mathbb{Q}_+^\times \times \mathbb{Z}_2$, kde $\mathbb{Q}_+^\times$ je grupa všech kladných racionálních čísel s násobením.

Cvičení 11. Nechť G, H jsou grupy. Pak $G \simeq (G \times H)/\tilde{H}$ a podobně $H \simeq (G \times H)/\tilde{G}$.

Čínská zbytková věta

Čínská zbytková věta je tvrzení z teorie čísel, které se týká situace, kdy máme n po dvou nesoudělných čísel $m_1, \ldots, m_n$ a pro zkoumané číslo m známe zbytek po dělení každým z těchto čísel. Tím je totiž jednoznačně určený zbytek čísla m po dělení jejich součinem $m_1 \cdots m_n$. (A samozřejmě také naopak – tento zbytek jednoznačně určuje zbytky po dělení jednotlivými činiteli.) Podíváme se na tuto větu z pohledu teorie grup.

Tvrzení. *Nechť $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla. Pak $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n} \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$.*

Důkaz. Označme $G = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$. Uvažme zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, které číslu $a \in \mathbb{Z}$ přiřadí n-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in G$, kde r_i je zbytek a po dělení m_i. Je lehce vidět, že se jedná o homomorfismus.

Jaké je jeho jádro? Aby se celé číslo zobrazilo na neutrální prvek v G, musí být dělitelné všemi čísly m_i. Jelikož jsou po dvou nesoudělná, nevyskytuje se žádné prvočíslo v rozkladu více než jednoho z nich. Pokud tedy chceme, aby bylo a dělitelné všemi z nich, musí být dělitelné jejich součinem. A také naopak – když je a dělitelné jejich součinem, tak se zobrazí na identitu. Takže jádro φ je cyklická podgrupa generovaná $m_1 m_2 \cdots m_n$, kterou označme K.

Z první věty o izomorfismu platí $\mathbb{Z}/K \simeq \operatorname{Im}\varphi$. Ale v prvním dílu jsme si přímo definovali grupu $\mathbb{Z}_n$ jako faktorgrupu $\mathbb{Z}$ podle podgrupy generované n. Takže $\mathbb{Z}/K = \mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$. Máme tedy izomorfismus mezi $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ a $\operatorname{Im}\varphi$, což je podgrupa G. Jedná se o dvě konečné grupy, takže $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ a $\operatorname{Im}\varphi$ musejí mít stejně prvků. To ale znamená, že $\operatorname{Im}\varphi$ musí být celé G (protože $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ i G mají $m_1 m_2 \cdots m_n$ prvků). Tím je tvrzení dokázáno.

Homomorfismus φ z důkazu má obraz **celé** $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ a na každý prvek z této grupy zobrazuje právě jeden koset podgrupy K v $\mathbb{Z}$. Ale z toho již plyne Čínská zbytková věta, neboť v jednom kosetu jsou právě všechna celá čísla, která dávají po dělení $m_1 m_2 \cdots m_n$ stejný zbytek.

Konečné grupy

Ve zbytku druhého dílu se zaměříme na konečné grupy a ukážeme si několik tvrzení, která nám říkají, co všechno takové grupy musejí splňovat. O struktuře malých grup je toho známo spoustu. Ví se třeba, jak vypadají až na izomorfismus všechny grupy až do řádu 2047. Když tedy v praxi narazíme na nějakou grupu řádu n, můžeme i vylučovacím způsobem zjistit, s jakou známou grupou je izomorfní.

Pokud bychom chtěli hloupě najít všechny možné grupy, tak by nám to zabralo hrozně moc času. Grupa je určena svou multiplikativní tabulkou a nejjednodušší odhad na počet grup řádu n je tudíž n^{n^2}. To je již pro dost malá n obrovské číslo, které bychom sice mohli díky svým znalostem o dost zmenšit, ale stejně se nejedná o žádnou lehkou práci. Hledat takové grupy tedy nemůžeme ani pomocí počítače úplně hloupě. V silách tohoto seriálu by bylo klasifikovat všechny grupy řádu nejvýše 15, ale i to by zabralo spoustu času, takže to nebudeme dělat. Místo toho si ukážeme nějaké příklady vět a myšlenek, které se při hledání všech možných grup používají. Tyto věty nejsou užitečné jen ke klasifikaci konečných grup, také nám dávají lepší náhled na to, co se v grupě vlastně může dít.

Začneme krátkým tvrzením, které už nám samo o sobě dá výčet všech grup řádu n pro nekonečně mnoho různých n.

Tvrzení. *Pokud G je grupa prvočíselného řádu p, pak $G \simeq \mathbb{Z}_p$.*

Důkaz. Jelikož má G alespoň dva prvky, existuje prvek, který není neutrální. Jaký může mít tento prvek řád? Jeho řád musí podle Lagrangeovy věty z prvního dílu dělit p. Protože se nejedná o neutrální prvek, musí řád navíc být větší než jedna. Proto je roven p. Cyklická podgrupa generovaná tímto prvkem má tedy p různých prvků a jedná se přímo o G. Grupa G je tedy cyklická, a proto izomorfní s $\mathbb{Z}_p$.

Pro grupy, které nemají prvočíselný řád, situace tak lehká není. V předchozím důkazu jsme použili Lagrangeovu větu. Při pohledu na její znění bychom si mohli položit otázku: „Už víme, že řád každé podgrupy dělí řád původní grupy G; platí ale také, že pro každý dělitel řádu grupy G existuje nějaká podgrupa takového řádu?“ Bohužel se ukazuje, že svět není tak krásný, aby tato věta platila.

Cvičení 12. Ukažte, že alternující grupa A_4 (grupa řádu 12) nemá žádnou podgrupu řádu 6. (Nebo si můžete najít jiný vlastní protipříklad.)

Obecné tvrzení tedy neplatí. Platí ale alespoň nějaká jeho část? Co kdybychom se třeba omezili na prvočíselné dělitele? Existuje pro každé prvočíslo p, které dělí řád grupy, podgrupa s řádem p? Už jsme ukázali, že každá taková podgrupa by musela být cyklická. Platnost tohoto tvrzení nyní ukážeme tím, že najdeme v grupě G prvek řádu p, který bude hledanou podgrupu generovat.

Věta. (Cauchyho) *Nechť G je konečná grupa a p prvočíslo, které dělí řád G. Pak existuje $a \in G$, jehož řád je roven p.*

Důkaz. Uvažme množinu X všech uspořádaných p-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ prvků z G takových, že $a_1 a_2 \cdots a_p = e$. Tato množina má $|G|^{p-1}$ prvků, neboť prvních $p-1$ složek můžeme zvolit libovolně a pro poslední máme potom vždy právě jednu možnost, jak ji zvolit, aby součin všech byl neutrální prvek. Proč si vybíráme takhle divnou množinu? Budeme chtít ukázat, že v ní leží nějaká p-tice, která má všechny prvky stejné a různé od e. Pak řád tohoto prvku musí dělit p, ale přitom nemůže být roven jedné. A to je přesně to, co chceme dokázat.

Uvažme nyní následující akci α grupy $\mathbb{Z}_p$ na této množině. Prvek $g \in \{0, \ldots, p-1\}$ bude působit jako jakási rotace složek: $\alpha_g((a_1, \ldots, a_p)) = (a_{1+g}, \ldots, a_{p+g})$, kde dodefinujeme přirozeně $a_{p+i} = a_i$ pro každé $i \geq 1$. Ověřme, že se skutečně jedná o akci. Nejdříve není vůbec jasné, zda pro každé $g \in G$ obraz každého prvku X znovu leží v X, není ale těžké to ukázat. Pokud platí $a_1 a_2 \cdots a_p = e$, pak vynásobením a_1^{-1} zleva a a_1 zprava získáme $a_2 \cdots a_p a_1 = a_1^{-1} a_1 = e$. Obdobně můžeme pokračovat dál a ukázat pro všechny „orotované“ p-tice, že opravdu leží v X.

Musíme ještě ověřit, že α je skutečně homomorfismus z G do S_X. Tedy, že pro každé $g, h \in \mathbb{Z}_p$ platí $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$. Pro libovolné $(a_1, \ldots, a_p) \in X$ máme $(\alpha_g \circ \alpha_h)((a_1, \ldots, a_p)) = \alpha_g((a_{1+h}, \ldots, a_{p+h})) = (a_{1+h+g}, \ldots, a_{p+h+g}) = \alpha_{g+h}((a_1, \ldots, a_p))$, jak jsme chtěli ukázat.

Víme tedy, že je α skutečně akce. Prozkoumejme nyní její orbity. Pro velikost orbity prvku $a = (a_1, \ldots, a_p)$ máme $|\mathcal{O}(a)| = \frac{|\mathbb{Z}_p|}{|G_a|} = \frac{p}{|G_a|}$. Proto $|\mathcal{O}(a)| = p$ nebo $|\mathcal{O}(a)| = 1$. Jak ale vypadají p-tice, které mají orbitu o velikosti jedna? Každé $g \in \mathbb{Z}_p$ je musí nechat na místě, takže musejí mít nutně všechny prvky stejné. A také naopak – pokud má p-tice z X všechny prvky stejné, pak její orbita bude mít velikost jedna. Součet velikostí všech orbit je dělitelný p, takže i počet orbit o velikosti jedna musí být dělitelný p (p dělí všechny ostatní orbity). Aspoň jedna orbita velikosti jedna existuje – orbita prvku $(e, \ldots, e)$, který zřejmě leží v X. Proto jich musí existovat alespoň p, a musí tedy existovat nějaké $g \neq e$ takové, že $(g, \ldots, g) \in X$. Takový prvek bude mít řád p, jak jsme si už zdůvodnili v prvním odstavci.

Obecně platí, že pokud $n \mid |G|$ a n je mocnina některého prvočísla, pak v G existuje podgrupa řádu n.[25] Podgrupy jiných řádů sice grupa mít může, ale u všech to platit nemusí. Vidíme teď, že

[25] V seriálu ale ukážeme jen, že taková podgrupa existuje, když je n největší mocninou prvočísla,

protipříklad pro neexistenci podgrup všech „přípustných“ řádů z předešlého cvičení byl nejmenší možný – žádné přirozené číslo menší než 12 neobsahuje vlastního dělitele, který by nebyl mocninou nějakého prvočísla.

Ve zbytku tohoto dílu si dokážeme další střípek mozaiky – ukážeme, že pokud α je největší mocnina p v prvočíselném rozkladu $|G|$, pak G obsahuje podgrupu řádu p^α. Přitom si o takových podgrupách řekneme i něco víc. Základní věty o těchto podgrupách se jmenují po norském matematiku Sylowovi.

Sylowovy věty

Definice. Podgrupu H konečné grupy G nazveme *sylowovskou p-podgrupou*, pokud je její řád mocninou[26] prvočísla p a neexistuje žádná jiná podgrupa G s řádem mocniny p, která ji celou obsahuje.

Tvrzení. *Mějme konečnou grupu G a prvočíslo p, které dělí její řád. Pak existuje netriviální sylowovská p-podgrupa.*

Důkaz. Z Cauchyho věty víme, že existuje podgrupa G s řádem p. Vezměme nyní ze všech podgrup, jejichž řád je mocninou prvočísla p, tu s největším řádem a označme ji P. Tato podgrupa je sylowovskou p-podgrupou, neboť pokud by jiná podgrupa s řádem mocniny p celou P obsahovala, pak bychom vybrali místo P ji.

Věta. (Sylowovy věty) *Nechť G je konečná grupa, p prvočíslo, které dělí její řád, a n_p počet jejích sylowovských p-podgrup. Pak platí následující:*

(1) *Pro každé dvě sylowovské p-podgrupy P, Q existuje prvek $g \in G$ takový, že $gPg^{-1} = Q$;*
(2) *$p \mid n_p - 1$ a zároveň $n_p \mid |G|$;*
(3) *každá sylowovská p-podgrupa má řád p^k, kde p^k je největší mocnina p, která dělí $|G|$.*

Podgrupy, pro které platí podmínka z první části tvrzení, nazýváme *konjugované v G*. Z toho, že zobrazení $h \mapsto ghg^{-1}$ je (vnitřní) automorfismus, plyne, že P a Q musejí být izomorfní. Ukážeme si nejdříve na příkladu, co si pod uvedenými pojmy a skutečnostmi můžeme představit.

Příklad. Nechť S_p je symetrická grupa na p prvcích, kde p je prvočíslo. Rádi bychom našli její sylowovské p-podgrupy. Řád G je roven $p!$. Největší mocnina p, která dělí tento řád, je právě p. Každá podgrupa s řádem p musí být cyklická. O jaké podgrupy se jedná? Řád permutace je roven nejmenšímu společnému násobku délek jejích cyklů,[27] takže jediné permutace řádu p jsou ty, kde se nachází pouze jediný cyklus, a to délky p. Právě podgrupy generované nějakým takovým prvkem budou tedy sylowovskými p-podgrupami.

Ověříme, že pro ně opravdu platí zformulovaná tvrzení. Pokud vezmeme dvě takové podgrupy P, Q a nějaké jejich generátory π, σ, pak díky stejné cyklové struktuře nutně existuje nějaká permutace ψ taková, že $\psi\pi\psi^{-1} = \sigma$. Vynásobením této rovnosti i-krát dostáváme $\psi\pi^i\psi^{-1} = \sigma^i$. Takže ψ opravdu konjugací zobrazuje prvky z P právě na prvky z Q – podgrupy P, Q jsou tedy v S_p konjugované.

Kolik jich je? Máme $p!$ způsobů, jak za sebe napsat čísla 1 až p, ale každý cyklus takto dostaneme v p různých otočeních. Takže cyklů o délce p existuje $(p-1)!$. Navíc každá sylowovská p-podgrupa obsahuje identitu a $p-1$ takových cyklů. Každý z těchto cyklů generuje celou podgrupu, a nemůže proto patřit ani do žádné jiné. Všechny cykly generují tedy dohromady jen $n_p = \frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$

---

která dělí $|G|$. Potom by již stačilo pouze ukázat, že pokud má grupa řád mocniny prvočísla, pak už obsahuje podgrupy všech řádů, které ho dělí. To není o nic těžší než zbylé důkazy v seriálu, zabývat se tím již ale nebudeme.

[26] Mocninou prvočísla p myslíme libovolné číslo ve tvaru p^n, kde n je celé nezáporné.

[27] To si můžete rozmyslet jako snadné cvičení.

podgrup. Z Wilsonovy věty platí v grupě $\mathbb{Z}_p^\star$ identita $(p-1)! = p-1$, z níž vynásobením $(p-1)^{-1}$ dostáváme $(p-2)! = 1$. Takže skutečně $p \mid n_p - 1$. Navíc zřejmě $n_p \mid |S_p|$, neboť $(p-2)! \mid p!$.

Poslední část tvrzení je už zřejmá. Největší mocnina p, která dělí $p!$, je totiž p^1 a námi popisované podgrupy mají přesně tento řád.

Předtím, než se pustíme do samotného důkazu, zmiňme ještě jedno zajímavé tvrzení plynoucí ze Sylowových vět.

Tvrzení. *Nechť G je konečná grupa a p prvočíslo, které dělí její řád. Pak sylowovská p-podgrupa P je normální v G právě tehdy, když je jediná.*

Důkaz. Pokud je P v G normální, tak pro všechna $g \in G$ platí $gPg^{-1} = P$. Nemůže tedy existovat žádná další sylowovská p-podgrupa, protože by nebyla s P konjugovaná.

Pokud naopak P v G normální není, existuje nějaké $g \in G$ takové, že $gPg^{-1} \neq P$. Označme $Q = gPg^{-1}$. Jedná se o grupu stejného řádu, neboť konjugace prvkem g dává vnitřní automorfismus G. Podle třetí části Sylowových vět má také řád největší mocniny p, která dělí řád G, takže je také sylowovská. Našli jsme tedy další sylowovskou p-podgrupu, a tím ukázali, že jediná sylowovská p-podgrupa existuje opravdu pouze tehdy, když je normální v G.

Dokažme si nyní postupně všechna tři tvrzení ze Sylowových vět. Nenechte se vyděsit délkou tohoto důkazu. Mohli bychom ho napsat kratší – používá se v něm ale několik originálních myšlenek, které jsme pro (snad) lepší pochopení rozepsali více.

Důkaz. Nechť X je množina všech podgrup grupy G. Grupu G necháme na tuto množinu působit konjugací. Označme tuto akci α; pro libovolné $g \in G$ a $H \in X$ tedy bude $\alpha_g(H) = gHg^{-1}$. (To, že je α skutečně akcí, jsme již zmínili dříve.)

Naší metou bude ukázat, že všechny sylowovské p-podgrupy leží v jedné orbitě této akce. To je přesně to, co chceme, neboť pokud leží dvě podgrupy H, K ve stejné orbitě, tak existuje nějaké $g \in G$ takové, že $\alpha_g(H) = K$. Jinými slovy jsou tyto dvě grupy v G konjugované. K tomuto cíli budeme směřovat v následujících asi sedmi odstavcích.

Již víme, že nějaká sylowovská p-podgrupa existuje, vyberme si tedy libovolnou z nich a označme ji P. Orbitu $\mathcal{O}(P)$ akce α označme O. V O budou jistě pouze sylowovské p-podgrupy. Předpokládejme totiž pro spor, že by nějaká $R \in O$ sylowovská nebyla – tedy, že by pro nějakou $R \in O$ existovala větší podgrupa V s řádem mocniny p, která by R obsahovala. Jelikož P, R leží ve stejné orbitě akce α, existuje $g \in G$ takové, že $\alpha_g(R) = P$. Potom ale $\alpha_g(V)$ je podgrupa s řádem mocniny p větším než řád P, která obsahuje P. To je ve sporu s tím, že je P sylowovská.

Vezměme nyní libovolnou další[28] sylowovskou p-podgrupu Q a ukažme, že Q leží v O. K tomu definujeme další akci β. Tentokrát půjde o akci grupy Q konjugací na množině O. Pro každé $q \in Q$ a $R \in O$ tedy definujeme $\beta_q(R) = qRq^{-1}$. Tato akce vypadá na první pohled hrozně divně a není vůbec jasné, zda je dobře definovaná. U α nám stačilo ověřit, že obraz podgrupy v konjugaci je znovu podgrupa. Zde ale máme jen několik podgrup, takže musíme nejdříve říct, že $\beta_q(R)$ vždy leží v O. Pro $q \in Q$ a $R \in O$ se ale β chová úplně stejně jako α, tj. $\beta_q(R) = \alpha_q(R)$. Navíc O je orbita akce α, takže skutečně $\beta_q(R) = \alpha_q(R) \in O$ pro všechna $q \in Q$ a $R \in O$. To, že je β homomorfismus, by se ověřilo úplně stejně jako u normální konjugace.

Zatím to vypadá, že jen definujeme čím dál tím divnější věci a konec důkazu je v nedohlednu. Není tomu ale tak. Nyní nám už jen stačí spočítat počet prvků v O. Ukážeme, že $p \mid |O| - 1$ a zároveň že pokud by $Q \notin O$, pak by $|O|$ bylo dělitelné p; z toho už bude jasné, že nutně $Q \in O$.

Akce β má dovoleno působit pouze některými prvky, může se tedy stát, že O se rozpadne na více orbit vzhledem k akci β, protože ta $g \in G$, která podgrupy v O „spojovala“, v Q nebudou. Jak velké budou orbity akce β? Když jsme si definovali akce, dokázali jsme, že velikost orbity obsahující prvek a je rovna indexu stabilizátoru tohoto prvku v grupě, kterou působíme. Takže velikost orbity je rovna řádu této grupy děleného něčím. Řád Q je ale mocnina p, tím pádem i velikost každé orbity musí být mocnina prvočísla – je tedy buď dělitelná p, nebo rovna 1. Prověříme nyní, kdy se

[28] Může ale být i $Q = P$.

může stát, že je rovna jedné. Ukážeme, že pokud $Q \in O$, stane se to právě jednou, a pokud $Q \notin O$, nestane se to nikdy.

Předpokládejme tedy, že existuje nějaká $R \in O$ taková, že je v orbitě sama. To znamená, že $qRq^{-1} = R$ pro všechna $q \in Q$. Později dokážeme, že potom každé $q \in Q$ nutně leží v R. Věřte nám ale na chvíli, že toto opravdu platí.

Pak dostáváme, že je Q podgrupa R. Pokud by $R \neq Q$, pak by R byla větší podgrupa než Q s řádem mocniny prvočísla, která Q obsahuje. Taková ale nemůže existovat, neboť je Q sylowovská. Musí tedy být $R = Q$. Na druhé straně, platí-li $R = Q$, pak zřejmě $qRq^{-1} = R$ pro všechna $q \in R = Q$.

Orbita velikosti jedna vznikne tedy právě tehdy, když je $Q \in O$, a v tom případě bude pouze jedna. Všimněme si nyní, že původní sylowovská podgrupa P v O leží. Pokud zvolíme $Q = P$, bude v O jedna orbita velikosti jedna a velikosti všech zbylých budou dělitelné p. Dostaneme tedy $p \mid |O| - 1$. Pokud by nyní existovala $Q \notin O$, tak by platilo také $p \mid |O|$, což už nelze. (Pak by muselo p dělit i rozdíl těchto dvou čísel, což je jedna.)

Až na jedno přeskočené tvrzení jsme tedy ukázali, že každé dvě sylowovské p-podgrupy jsou v G konjugované (všechny leží ve stejné orbitě) a že platí $p \mid |O| - 1$. Ale $|O|$ je rovno počtu všech sylowovských p-podgrup n_p. Dostali jsme tedy $p \mid n_p - 1$. V důkazu zbytku se bohužel neobejdeme bez jednoho nového pojmu a pár technických lemmat. Slibujeme ale, že už nic nebude tak dlouhé.

Normalizátory

Definice. Uvažujme opět akci α grupy G na množině jejích podgrup definovanou jako $\alpha_g(R) = gRg^{-1}$ pro všechna $R \leq G$ a $g \in G$. To nám umožňuje pro každou grupu G a její podgrupu P definovat *normalizátor* podgrupy P v grupě G jako stabilizátor P vzhledem k této akci. Normalizátor je tedy podgrupou G a budeme ho značit $N_G(P)$.

Normalizátor není tedy nic exotičtějšího než stabilizátor v jedné konkrétní akci. Z jeho pojmenování můžeme odtušit, že by mohl mít něco společného s normalitou. A opravdu má:

Cvičení 13. Podgrupa P grupy G je normální právě tehdy, když $N_G(P) = G$.

Cvičení 14. Nechť G je grupa a H její podgrupa. Pak $H \trianglelefteq N_G(H)$.

Na normalizátor podgrupy H se tudíž můžeme dívat i jako na největší podgrupu, ve které je H normální. Řečené vlastnosti normalizátoru nyní aplikujeme v důkazu Sylowových vět.

Lemma. *Nechť G je konečná grupa a P její sylowovská p-podgrupa. Pak $p \nmid [N_G(P) : P]$.*

Důkaz. Již víme, že $P \trianglelefteq N_G(P)$. Uvažme tedy faktorgrupu $H = N_G(P)/P$. Předpokládejme pro spor, že p dělí index grupy P v $N_G(P)$ – tedy, že dělí řád H. Podle Cauchyho věty pak existuje nějaký prvek řádu p v H. Označme ho aP, kde a je nějaký prvek $N_G(P)$ neležící v P (jinak by měl koset $aP = P$ řád jedna). Ukážeme, že když do P „přidáme“ tento prvek a, dostaneme větší podgrupu s řádem mocniny p. Formálně definujme podgrupu Q generovanou množinou $P \cup a$. Dokážeme, že má tato grupa $p \cdot |P|$ prvků.

Podgrupa Q je uzavřená na grupové operace. Nachází se v ní a i celá grupa P. Proto tam musí ležet i prvky ze všech kosetů tvaru a^iP, kde $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Koset aP má řád p – tím pádem jsou všechny takové kosety různé a máme $p|P|$ prvků, které musí ležet v Q. Ukážeme, že vzniklá množina už je uzavřená na grupové operace. Neutrální prvek v ní leží, protože ten leží už v P. Pokud jsou $g, h \in Q$, tak $g \in a^iP$ a $h \in a^jP$ pro nějaká $i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Inverzní prvek ke g tedy leží v $a^{p-i}P \subset Q$ a stejně tak $gh \in a^{i+j}P \subset Q$. Tím pádem je Q podgrupa, která má počet prvků rovný mocnině p, obsahuje P a je větší než P. To je ale ve sporu se skutečností, že je P sylowovská p-podgrupa. Tím je důkaz lemmatu dokončen.

Důkaz přeskočeného tvrzení pořád chybí, ale pokud si na něj vydržíme ještě chvíli počkat, ukážeme již celkem jednoduše, že řád sylowovské p-podgrupy je skutečně ten největší možný:

Jelikož je velikost orbity rovna indexu stabilizátoru libovolného jejího prvku a stabilizátor v konjugaci podgrup je normalizátor, platí $[G : N_G(P)] = |O|$. Dále víme, že $p \nmid [N_G(P) : P]$. Pro konečné grupy je index roven podílu velikostí. Proto dostáváme $\frac{|G|}{|P|} = \frac{|G|}{|N_G(P)|}\frac{|N_G(P)|}{|P|} = [G : N_G(P)] \cdot [N_G(P) : P] = |O|[N_G(P) : P]$. Ani jeden z činitelů vpravo není dělitelný p (víme, že $p \mid |O| - 1$), takže $|P|$ musí být dělitelné stejnou mocninou p jako $|G|$. Protože navíc víme, že $|O| = n_p$, dostáváme z uvedené rovnosti i další požadované tvrzení: $n_p \mid |G|$. A to je vše, co jsme chtěli dokázat.

K dokončení nám tedy stačí již jen důkaz onoho neustále přeskakovaného tvrzení, které zformulujeme jako následující lemma:

Lemma. *Nechť G je konečná grupa a p prvočíslo, které dělí její řád. Dále ať R je sylowovská p-podgrupa. Pokud má $q \in N_G(R)$ řád mocniny p, pak $q \in R$.*

Je to přesně to, co potřebujeme? V důkazu Sylowových vět působíme sylowovskou p-podgrupou Q konjugací na další sylowovskou p-podgrupu R. Víme dále, že $qRq^{-1} = R$ pro všechna $q \in Q$ – tedy Q leží uvnitř normalizátoru $N_G(R)$. Navíc z Lagrangeovy věty víme, že řád každého $q \in Q$ musí dělit $|Q|$, což je mocnina p. Takže i řád q musí být mocninou prvočísla p.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $q \notin R$. Ve faktorgrupě $N_G(R)/R$ není tedy qR neutrálním prvkem. Označíme-li jeho řád r, víme tedy, že $r > 1$. Ukážeme, že r dělí řád q v Q, který označíme s. Můžeme psát $s = kr + l$, kde $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Máme $q^s = e$, tedy $q^s \in R$ a nutně $(qR)^s = R$. Ale i $(qR)^{kr} = ((qR)^r)^k = R^k = R$, takže $(qR)^l = (qR)^{s-kr} = RR^{-1} = R$. Pokud $l > 0$, byli bychom ve sporu s tím, že má qR řád r. Proto $l = 0$.

Řád r prvku qR v grupě $N_G(R)/R$ je tedy dělitelem řádu q v Q, což je mocnina prvočísla p. Jelikož $r > 1$, musí tím pádem p dělit r. Víme tedy, že p dělí řád $qR \in N_G(R)/R$, a z Lagrangeovy věty proto plyne, že p dělí i $|N_G(R)/R|$. To je ale ve sporu s předešlým lemmatem.

Tím je důkaz Sylowových vět konečně dokončen. Všimněte si, že v důkazu posledního lemmatu jsme využili jen vlastnosti normalizátoru, rozhodně ne něco ze Sylowových vět – to je důležité, jinak by totiž šlo o důkaz kruhem.

Sylowovy věty útočí

Chvilku to trvalo, ale nyní se už můžeme pustit do využívání Sylowových vět na konkrétní případy. Pokud si věříte, můžete si zkusit následující příklad sami.

Příklad. Neexistuje žádná jednoduchá grupa řádu 12.

Důkaz. Chceme ukázat, že každá dvanáctiprvková grupa má nějakou normální podgrupu. Jak to můžeme udělat bez toho, abychom se dívali na všechny takové grupy? Pomocí Sylowových vět! Stačí nám ukázat, že vždy existuje pouze jedna sylowovská 2-podgrupa nebo pouze jedna sylowovská 3-podgrupa.

Kolik může být sylowovských 3-podgrup? Trojka musí dělit jejich počet zmenšený o jedna a navíc jejich počet musí dělit dvanáctku. Může se tedy jednat pouze o přirozená čísla menší než 12 a z těch těmto podmínkám vyhovuje pouze 1 a 4. Pokud $n_3 = 1$, tak máme hotovo – sylowovská 3-podgrupa bude normální, a protože má řád 3, bude také vlastní. Zbývá nám tedy vyšetřit již jen případ $n_3 = 4$.

V tomto případě ukážeme, že existuje pouze jedna sylowovská 2-podgrupa. Každá ze čtyř sylowovských 3-podgrup má řád 3. Obsahuje identitu a další dva prvky, které musejí mít řád 3. Žádné dvě z těchto podgrup nemohou mít netriviální průnik, neboť každý jiný prvek je generátorem dané podgrupy, takže by nám vyšly dvě stejné. V grupě tedy existuje alespoň 8 prvků řádu 3. Sylowovská 2-podgrupa má řád největší mocniny dvojky, která dělí dvanáct – tedy 4. Nemůže ale obsahovat žádný z prvků řádu 3 – to by bylo ve sporu s Lagrangeovou větou. Musí tedy obsahovat právě ty čtyři zbývající prvky, a proto je pouze jedna. Takže je normální a vlastní – ani v tomto případě nedostaneme jednoduchou grupu.

Toto využití bylo velmi specifické. Stejný nástroj ale můžeme použít i na některé nekonečné třídy. Ukázali jsme si již, jak vypadají všechny grupy prvočíselného řádu. Dalším krokem by třeba mohlo být zkoumání, jak vypadají grupy, jejichž řád je součinem dvou různých prvočísel.

Tvrzení. *Nechť G je grupa řádu pq, kde $p < q$ jsou prvočísla a $p \nmid q-1$. Pak již $G \simeq \mathbb{Z}_{pq}$.*[29]

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $n_p = n_q = 1$. Víme ze Sylowových vět, že $n_p \mid pq$ i $n_q \mid pq$. Jsou ale jen čtyři různá přirozená čísla, která dělí pq, a to $1, p, q, pq$. Dále ze Sylowových vět víme, že $n_q = kq+1$ pro nějaké nezáporné celé k. Toto číslo není nikdy dělitelné q, takže nám nemůže vyjít q ani pq. Navíc $n_q = 1$ nebo $n_q \geq q+1 > q > p$, takže nemůže vyjít ani p a musí být nutně $n_q = 1$. Stejně tak dostaneme, že n_p není p ani pq. Pokud by bylo $n_p = q$, tak $lp + 1 = q$ pro nějaké l. Z toho ale plyne, že $p \mid q-1$, což jsme si v předpokladu zakázali. Musí proto nutně být i $n_p = 1$.

Sylowovská p-podgrupa i q-podgrupa jsou tedy normální – označme je P, Q. Mají prvočíselný řád, takže musí být nutně $P \simeq \mathbb{Z}_p, Q \simeq \mathbb{Z}_q$. Pokud ukážeme, že $P \cap Q = \{e\}$ a zároveň $PQ = G$, dostaneme již z věty o direktním součinu, že $G \simeq P \times Q \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. A o té grupě jsme si již dokázali, že je izomorfní $\mathbb{Z}_{pq}$.

Proč $P \cap Q = \{e\}$? Všechny prvky P kromě neutrálního mají řád p v G. Stejně tak v grupě Q mají řád $q \neq p$. Žádné se tedy nemohou rovnat.

Označme a nějaký generátor grupy P, b generátor grupy Q (generátory existují, protože jsou P, Q cyklické). Ukážeme, že $G = \{a^i b^j\}$, kde $0 \leq i < p$, $0 \leq j < q$. Popsali jsme pq výrazů; abychom dokázali, že nám takto vyjdou všechny prvky G, stačí nám ukázat, že se žádné dva různé nerovnají. Nechť tedy $a^{i_1} b^{j_1} = a^{i_2} b^{j_2}$. Pak vynásobením b^{-j_1} zprava a a^{-i_2} zleva dostáváme $a^{-i_2} a^{i_1} = b^{j_2} b^{-j_1}$. Číslo vlevo patří do podgrupy P, číslo vpravo do Q. Jelikož mají pouze triviální průnik, tak se nutně obě strany rovnají e. Tím pádem $i_2 = i_1, j_2 = j_1$, neboli dva prvky se rovnají pouze tehdy, mají-li úplně stejné vyjádření.

Konečně do PQ patří jistě všechny prvky v tomto tvaru, takže G je částí PQ. Ale žádné další prvky dostat nemůžeme. Nutně tedy $PQ = G$ a máme hotovo.

Sylowovy věty tedy dávají takový číselněteoretický vhled do konečných grup. Velmi elegantním způsobem totiž postulují poměrně silné podmínky, které musí struktura konečné grupy dané velikosti splňovat. Jejich důkaz byl složitější, ale samotné znění nijak zvlášť komplikované není a můžeme pomocí nich dokázat spoustu věcí, které by bez nich byly velice obtížné. Dokážete si třeba představit, jak byste se snažili dokázat minulé tvrzení bez jejich znalosti?

Tím jsme důkladně prozkoumali symetrie a některé konečné objekty. Za dveřmi ale zatím leží obrovský svět těch nekonečných, které jsou neméně zajímavé, komplikované i užitečné. Těšme se na ně.

[29] Grupy, jejichž řád je součinem dvou různých prvočísel, se dají popsat i bez dodatečných předpokladů, museli bychom ale vybudovat ještě další nástroje, jako je například semidirektní součin grup. V takových případech navíc mohou existovat i grupy neizomorfní $\mathbb{Z}_{pq}$ – jako třeba D_{2q}.

Návody ke cvičením

1. Grupa G je abelovská právě tehdy, když pro libovolné $g, h \in G$ platí $gh = hg$, což je ekvivalentní faktu, že pro všechna $g, h \in G$ platí $\varphi_g(h) = ghg^{-1} = h$, což znamená, že všechny vnitřní automorfismy odpovídají identitě. Tím jsme dokázali celou ekvivalenci.

2. Ať $\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$. Potom homomorfismus $\psi\varphi_g\psi^{-1}$ libovolný prvek $h \in G$ posílá na prvek $\psi(g\psi^{-1}(h)g^{-1}) = \psi(g)h(\psi(g))^{-1}$, toto složené zobrazení tedy odpovídá homomorfismu $\varphi_{\psi(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$. Takže $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

3. Protože pro libovolné $\sigma, \tau \in S_n$ platí $\mathrm{sign}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \mathrm{sign}(\tau)\,\mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau^{-1})$ a $\mathrm{sign}(\tau) = \mathrm{sign}(\tau^{-1})$, zachovává konjugování paritu (tedy speciálně zachovává sudost), takže A_n je normální.

Trochu stylověji, $A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sign})$ v našem zobrazení $\mathrm{sign} : S_n \to \{1, -1\}$ a jádra jsou normální.

4. Každý homomorfismus φ do $\{1, -1\}$ je určený svým jádrem $\mathrm{Ker}\,\varphi$, které je normální podgrupou S_n. My si ale s pomocí jednoduchosti A_n dokážeme něco mnohem silnějšího, a sice, že jediné normální podgrupy S_n pro $n \geq 5$ jsou $\{e\}$, A_n a S_n samotná.

Pro spor ať K je normální podgrupa takové S_n, ale je různá od těch jmenovaných. Protože průnik normálních podgrup je také normální, je pak i $K \cap A_n \trianglelefteq S_n$, je tedy normální i v A_n. Díky jednoduchosti je proto $K \cap A_n$ buď A_n, nebo $\{e\}$.

Pokud je ale $K \cap A_n = A_n$, máme z předpokladu $A_n < K < S_n$. Jenže potom $\frac{|S_n|}{2} = |A_n| < |K| < |S_n|$. To ale není možné, neboť $|K|$ potom nemůže být dělitelem $|S_n|$.

Pokud je naopak $K \cap A_n = \{e\}$, musí K obsahovat kromě identity pouze liché permutace. Protože je ale normální, s každou permutací obsahuje i všechny další permutace z S_n se stejnou cyklovou strukturou. Jakmile je tedy K netriviální a obsahuje nějakou lichou permutaci, díky podmínce $n \geq 5$ určitě obsahuje alespoň 4 prvky. Potom z ní ale lze vybrat dvě liché permutace π_1, π_2, které k sobě nejsou inverzní. Jenže potom je $\pi_1\pi_2 \in K$, $\pi_1\pi_2 \neq e$ a konečně $\mathrm{sign}(\pi_1\pi_2) = \mathrm{sign}(\pi_1)\,\mathrm{sign}(\pi_2) = 1$, což je spor.

Grupy $\{e\}$, A_n a S_n jsou tedy skutečně veškeré normální podgrupy S_n. To zároveň charakterizuje obrazy všech homomorfismů z S_n podle první věty o izomorfismu. Netriviální homomorfismus $S_n \to \{1, -1\}$ musí být na, proto jeho jádro musí mít v S_n index 2. Toto jádro je tedy nutně rovno $A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sign})$, tedy sign je skutečně jediný takový homomorfismus (protože homomorfismy do dvouprvkové grupy jsou jednoznačně určené svým jádrem).

5. Dva náhrdelníky tedy považujeme za stejné, pokud na sebe jejich nakreslení lze převést pomocí nějakých rotací a reflexí. Uvažme proto akci grupy D_{30} na množině všech patnáctiúhelníků obarvených čtyřmi barvami; těch je 4^{15}. Identická permutace fixuje všech 4^{15} prvků. Rotace o k prvků pro k nesoudělná s patnácti fixují pouze ta čtyři nakreslení, která mají všechny korálky stejné. Rotace o $3k$ pak fixuje přesně ty náhrdelníky, ve kterých se periodicky opakuje sekvence tří korálků[30]; těch je 4^3. Podobně rotace o $5k$ fixuje 4^5 náhrdelníků. Každá z patnácti reflexí potom fixuje právě ta nakreslení, která jsou symetrická podle příslušné osy. Těch je 4^8.

Z Burnsideova lemmatu tudíž plyne

$$O = \frac{1}{30}(4^{15} + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^5 + 15 \cdot 4^8),$$

což se rovná hledanému počtu různých náhrdelníků.

6. Díky zadaným podmínkám je každé takové dláždění jednoznačně určeno svým vzhledem na pevném čtverci 9×9. Trochu lépe řečeno, čtverečky, které se liší v obou souřadnicích o násobky 9, můžeme považovat za stejné. To nám dává 2^{81} způsobů obarvení. Některá obarvení ale považujeme za stejná. Uvažme grupu G, jejíž prvky odpovídají posunutím čtvercové mřížky o $i \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ doprava a o $j \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ nahoru (později se v seriálu dozvíme, že se tato grupa jmenuje $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$).

[30] To, že nefixuje žádné jiné náhrdelníky, plyne z toho, že pět je prvočíslo.

Grupa G má 81 prvků. Identita fixuje všech 2^{81} nakreslení. Posunutí o i nahoru a j doprava pak může fixovat pouze taková nakreslení, ve kterých se opakuje obdélník s rozměry $i \times j$. Navíc se ale musí opakovat celý čtverec 9×9. Snadno proto vidíme, že posunutí o i nahoru a j doprava fixuje právě ta nakreslení, ve kterých se opakuje obdélník s rozměry $\mathrm{NSD}(i,9) \times \mathrm{NSD}(j,9)$. Počet takových fixovaných nakreslení tedy závisí pouze na dělitelnosti čísel i, j čísly 3 a 9. To nám dává 9 různých „druhů“ prvků z G. Z Burnsideova lemmatu pak dostáváme počet orbit jako

$$6 \cdot 6 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^9 + 6 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^{27} + 2 \cdot 2^{27} + 2^{81},$$

což můžeme upravit do přehlednějšího tvaru

$$2^3 + 2^8 + 2^{13} + 2^{29} + 2^{81}.$$

7. Čtyřstěn má šest hran, nejprve je třeba určit vhodnou podgrupu S_6. Podobně jako minule, symetrie čtyřstěnu jsou určeny permutacemi jeho čtyř vrcholů. Některé z nich ale převracejí jeho orientaci (podobně jako osové symetrie převracejí orientaci trojúhelníků v rovině). Dva nepřímo shodné (obarvené) čtyřstěny v prostoru ale pro nás stejné být nemusí, takové permutace nás proto nezajímají. Jednou nepřímou symetrií je reflexe podle roviny určené dvěma vrcholy a středem protější strany, ta odpovídá transpozici v S_4. Takové transpozice přitom generují celou S_4, snadno tedy vidíme, že přípustné permutace vrcholů tvoří dvanáctiprvkovou grupu A_4. My ale opět musíme najít, jaké grupě permutací hran $G \leq S_6$ tyto permutace vrcholů odpovídají.

Po chvilce rozmýšlení dostáváme polyanom

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12}\left(x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2\right).$$

Dosazením barevných polynomů $g_i = a^i + b^i$ a roznásobením dostáváme polynom

$$Q(a,b) = a^6 + a^5b + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 2a^2b^4 + ab^5 + b^6.$$

Koeficienty tohoto polyanomu pak odpovídají počtům čtyřstěnů s příslušnými rozloženími barev – celkem je jich 12, tři hrany od každé barvy mají 4 různé čtyřstěny atd.

8. Stačí ověřit, že je $G' \times H'$ uzavřená na všechny grupové operace. Identita (e,e) zde leží; součin $(g_1', h_1')(g_2', h_2') = (g_1'g_2', h_1'h_2') \in G' \times H'$; $(g_1', h_1')^{-1} = ({g_1'}^{-1}, {h_1'}^{-1}) \in G' \times H'$.

9. Ukážeme to pro $\tilde{G}$ (pro druhý případ se důkaz provede analogicky). V minulém cvičení jsme si již rozmysleli, že se jedná o podgrupy. Nyní tedy ukážeme normalitu. Nechť (g,h) je libovolný prvek $G \times H$ a (g_0, e) libovolný prvek $\tilde{G}$. Pak $(g,h)(g_0,e)(g^{-1},h^{-1}) = (gg_0g^{-1}, heh^{-1}) = (gg_0g^{-1}, e) \in \tilde{G}$, takže skutečně $\tilde{G} \trianglelefteq G \times H$.

10. Zvolme $H = \mathbb{Q}_+^\times$, K podgrupu generovanou prvkem -1 (obsahující jen -1 a 1), která je zřejmě izomorfní se $\mathbb{Z}_2$. Chceme ukázat, že $H \times K \simeq \mathbb{Q}^\times$. Podle předchozí věty nám k tomu stačí, že $HK = \mathbb{Q}^\times, H \cap K = \{1\}, H \trianglelefteq \mathbb{Q}^\times, K \trianglelefteq \mathbb{Q}^\times$. Ale každé racionální číslo kromě nuly dostaneme jako součin kladného racionálního čísla s jedničkou nebo minus jedničkou; z čísel $1, -1$ je kladné jen 1; podgrupy jsou normální, jelikož je grupa $\mathbb{Q}^\times$ abelovská.

11. Vyřešíme pouze první část tvrzení. Stačí zvolit zobrazení, které prvku g přiřadí koset $(g,e)\tilde{H}$. O tomto zobrazení se jednoduše ukáže, že se jedná o izomorfismus.

12. Rozmyslete si, že grupa A_4 obsahuje kromě identity tři permutace, které prohazují dvě dvojice různých prvků, a osm trojcyklů fixujících zbylý prvek. Hledaná podgrupa by měla mít index dva, takže podle cvičení z předešlého dílu by měla být normální. Aspoň jeden trojcyklus musí obsahovat (jinak by měla maximálně 4 prvky) – označme ho (abc) a poslední číslo nechť je d. Musí tedy obsahovat i $(abc)^2 = (acb)$. Pokud konjugujeme tyto dva trojcykly postupně prvky A_4

$(ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)$, dostaneme, že všechny trojcykly musí ležet uvnitř naší podgrupy. Trojcyklů je ale osm, což je ve sporu s tím, že má podgrupa 6 prvků. Žádná podgrupa řádu 6 tedy existovat nemůže. (Pokud přijmeme v seriálu nedokázaný fakt, že jsou grupy A_n pro $n \geq 5$ jednoduché, tak dalšími příklady mohou být právě všechny takové A_n, protože neobsahují podgrupu řádu $\frac{|A_n|}{2} = \frac{n!}{4}$.)

13. Pokud $N_G(P) = G$, pak pro každé $g \in G$ platí $gPg^{-1} = P$, což je přesně definice normality. Na druhé straně, pokud pro každé $g \in G$ platí $gPg^{-1} = P$, pak každé $g \in G$ nechává P na místě – tedy patří do stabilizátoru P v akci konjugace.

14. Pro každý prvek g grupy $N_G(H)$ platí $gHg^{-1} = H$. Proto je H v $N_G(H)$ normální.

Návody k úlohám

1. Uvažme všechny možné kolotoče s n sedátky obarvenými m barvami. Dva takové kolotoče budeme považovat za stejné, jestliže se na sebe dají převést pouze otočením (nikoli zrcadlením). Různým kolotočům pak vzájemně jednoznačně odpovídají orbity akce α grupy $\mathbb{Z}_n$, která prvku $k \in \mathbb{Z}_n$ přiřazuje otočení o k pozic po směru hodinových ručiček. Otočení α_k o k pozic přitom fixuje přesně ty kolotoče, ve kterých se barvy sedátek opakují s periodou $\mathrm{NSD}(n,k)$. (Takové otočení totiž fixuje pouze kolotoče s periodou k, každá perioda ale musí dělit délku celého kolotoče n.) Otočení α_k tedy fixuje přesně $m^{\mathrm{NSD}(n,k)}$ nakreslení kolotočů, z Burnsideova lemmatu je proto počet různých kolotočů roven $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^{\mathrm{NSD}(n,i)}$. Počet různých kolotočů je určitě přirozené číslo, takže n zadanou sumu skutečně dělí.

2. Začneme slíbeným fíglem – dokážeme následující tvrzení: Je-li G konečná grupa a $H < G$, potom G není rovno sjednocení $\bigcup \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$, tj. sjednocení všech množin gHg^{-1} přes všechna $g \in G$. Jinak řečeno, je-li H nějaká ostře menší podgrupa G, nelze určitě jejím konjugováním vyrobit všechny prvky G. Jak to dokážeme? Pomocí akcí.

Označme X množinu všech podgrup G, jež jsou konjugovány s H. Jejich počet označme k. Potom G působí konjugací na X a toto působení je tranzitivní. Stabilizátor H v této akci označme $N_G(H)$. Potom dle tvrzení z kapitoly o akcích platí $k = [G : N_G(H)] = \frac{|G|}{|N_G(H)|}$.

Přitom ale $N_G(H) \geq H$, neboť $hHh^{-1} = H$ pro každé $h \in H$. Z předešlého vztahu proto máme $k \leq \frac{|G|}{|H|}$, tedy $k|H| \leq |G|$.

Pokud by bylo $k = 1$, platí $N_G(H) = G$, takže se H při konjugování ani nehne[31] – a proto existují prvky G, které konjugováním H nedostaneme. Pokud je však $k \geq 2$, máme $\left|\bigcup \{gHg^{-1} \mid g \in G\}\right| < k|H|$, neboť sice sjednocujeme přesně k množin velikosti $|H|$, každě dvě z nich ale obsahují ve svém průniku alespoň e, takže nerovnost je ostrá. Celkem potom máme $\left|\bigcup \{gHg^{-1} \mid g \in G\}\right| < k|H| = |G|$, sjednocení tedy nemohlo vytvořit celou G.

Vraťme se nyní k úloze a označme $H = \langle A \rangle$. Pro spor ať $H < G$. Dle předešlého potom konjugováním H nelze vyrobit celou G. Jenže každé $g \in G$ je konjugované s nějakým $a_i \in A$, takže konjugováním H skutečně vznikne celá G. To je spor, takže $H = G$ a jsme hotovi.

[31] Což mimochodem znamená, že v takovém případě je H normální.

Výsledky po 3. podzimní sérii

Detailní výsledky jednotliých sérií nalezneš na našem webu: mks.mff.cuni.cz/vysledky

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1p	2p	3p	1s	celkem	hist
1.	*Josef*	*Minařík*	3	GJarošeBO	23	25	25	15	**88,29**	307
2.	*Danil*	*Koževnikov*	4	GKepleraPH	25	22	25	15	**87,33**	816
3.	*Matěj*	*Doležálek*	3	G Humpolec	23	24	25	15	**86,70**	471
4.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	24	23	24	15	**84,96**	307
5.	*Jonáš*	*Havelka*	2	G Jírov ČB	24	23	23	14	**84,19**	84
6.	*Viktor*	*Fukala*	1	GKepleraPH	22	25	24	13	**84,11**	108
7.	*Adam*	*Křivka*	2	CMGPgBrno	21	23	23	15	**82,01**	82
8.	*Magdaléna*	*Mišinová*	1	GKepleraPH	22	22	25	12	**81,86**	82
9.	*Radek*	*Olšák*	3	GMensaPH	25	18	25	13	**81,44**	571
10.	*Alexandr*	*Jankov*	4	MatičníGOS	20	22	23	15	**80,13**	439
11.	*Ondřej*	*Tkaczyszyn*	3	GKepleraPH	24	21	24	11	**79,33**	79
12.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	1	GZborovPH	23	23	24	9	**78,66**	79
13.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	2	GJHroncaBA	25	25	23	5	**78,55**	485
14.	*Dominik*	*Stejskal*	3	G Krnov	21	21	21	14	**76,99**	77
15.	*Petr*	*Gebauer*	4	G Mělník	17	25	19	11	**72,60**	643
16.	*Tomáš*	*Flídr*	0	GMasarykKM	23	23	17	9	**72,23**	80
17.	*Hedvika*	*Ranošová*	4	GBudějovPH	15	19	25	13	**71,65**	636
18.	*Ondřej*	*Krabec*	3	G KomHavíř	19	21	21	10	**71,09**	237
19.	*Petr*	*Khartskhaev*	1	PORG PH	14	23	22	8	**67,76**	108
20.	*Matěj*	*Krátký*	2	PORG PH	18	21	16	12	**67,73**	134
21.	*Miroslav*	*Macko*	2	LeafAcademy	23	22	23	–	**67,63**	142
22.	*Mikuláš*	*Brož*	1	GNadŠtolPH	14	23	22	7	**66,52**	67
23.	*Klára*	*Churá*	1	GNerudCheb	21	22	23	–	**65,75**	66
24.	*Klára*	*Pernicová*	1	GŠlapanice	18	21	19	9	**65,40**	65
25.	*Martin*	*Zimen*	3	GJMasar JI	17	18	19	10	**64,03**	387
26.	*Jakub*	*Růžička*	3	G Nymburk	17	19	20	6	**62,40**	136
27.	*Martin*	*Raška*	4	WichtG OS	20	21	17	4	**62,03**	239
28.	*Lucie*	*Kundratová*	3	G TGM Zlín	19	19	20	4	**61,59**	429
29.	*Jan*	*Hrubeš*	3	G ČKrumlov	15	18	21	6	**60,61**	61
30.	*Zuzana*	*Urbanová*	4	GFXŠaldyLI	18	16	17	9	**59,09**	306
31.	*Filip*	*Čermák*	4	MendelG OP	16	17	22	3	**58,67**	410
32.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	1	PORG PH	16	21	18	2	**56,41**	68
33.	*Anna*	*Mlezivová*	4	GCoubTábor	17	18	18	4	**56,34**	201
34.	*David*	*Klement*	2	GNadAlejPH	18	16	21	–	**55,80**	149
35.	*Adam*	*Mendl*	1	GCoubTábor	17	18	21	–	**55,66**	425
36.	*Petr*	*Zahradník*	3	GŠmejkalÚL	14	15	20	6	**55,13**	199
37.	*Martin*	*Hubata*	2	GMikul23PL	18	12	23	2	**54,31**	167
38.	*Jan*	*Vavřín*	1	PORG PH	17	22	–	15	**54,12**	184
39.	*Jindřich*	*Dušek*	3	GKepleraPH	16	20	16	1	**54,00**	54
40.	*Lenka*	*Kopfová*	3	MendelG OP	16	14	19	4	**53,10**	584
41.	*Pavel*	*Hudec*	4	GJarkovPH	23	–	21	10	**52,95**	639
42.	*Jakub*	*Parada*	2	G Grösss BA	23	18	12	–	**52,39**	227
43.	*Martin*	*Starovič*	2	ŠpMNDaG BA	14	17	19	–	**50,32**	50
44.	*David*	*Beinhauer*	3	MendelG OP	16	20	14	0	**50,18**	73
45.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	4	GZborovPH	18	16	11	4	**48,50**	599
46.	*Martin*	*Bakoš*	4	GPBystrica	9	16	17	4	**45,95**	243

47.	*Kateřina*	*Panešová*	2	G Teplice	12	19	15	–	**45,53**	46
48.	*Jan*	*Kaifer*	2	GKepleraPH	–	20	18	7	**44,61**	89
49.	*Tomáš*	*Ganz*	2	ŠpMNDaG BA	13	17	14	–	**43,95**	44
50.	*Dominik*	*Majkus*	3	GNVPláníPH	17	17	8	–	**42,86**	43
51.	*Tomáš*	*Čelko*	4	GPBystrica	10	16	17	–	**42,25**	274
52.	*Josef*	*Král*	3	MendelG OP	15	18	9	–	**41,65**	91
53.	*Klára*	*Grinerová*	1	GZborovPH	13	16	13	–	**41,17**	41
54.	*Václav*	*Janáček*	1	GJarošeBO	17	22	–	–	**38,71**	39
55.	*David*	*Ryzák*	4	G Trutnov	13	12	13	–	**38,02**	108
56.	*Ondřej*	*Macháč*	2	GStrážnice	7	18	13	–	**37,82**	38
57.	*Soňa*	*Husáková*	1	GČeskoliPH	15	10	13	–	**37,53**	38
58.	*Karel*	*Chwistek*	1	MendelG OP	15	22	–	–	**37,32**	37
59.	*Anna*	*Musilová*	2	PORG PH	12	16	9	–	**36,97**	159
60.	*Zuzana*	*Šraierová*	3	GČeskoliPH	–	18	12	6	**36,73**	51
61.	*Alexandra*	*Géciová*	2	GJHroncaBA	8	17	11	–	**36,57**	103
62.	*Alžběta*	*Manová*	3	G UherBrod	3	20	11	–	**33,62**	109
63.	*Jonáš*	*Stoilov*	2	PORG PH	9	15	9	–	**33,35**	66
64.	*Šimon*	*Hutař*	3	PORG PH	11	17	4	–	**32,37**	59
65.	*Kateřina*	*Charvátová*	3	GBNěmcovHK	7	11	14	0	**32,14**	254
66.	*Dominika*	*Hájková*	3	GPísnickPH	8	14	9	–	**31,64**	32
67.	*Ludmila Hana*	*Houfková*	1	GMHS	13	18	–	–	**30,34**	30
68.	*Ákos*	*Záhorský*	4	G VJM Šahy	13	18	–	–	**30,16**	170
69.	*Erik*	*Řehulka*	2	ŠpMNDaG BA	–	20	9	–	**29,60**	30
70.	*Klára*	*Hloušková*	2	G Kolín	9	6	12	2	**29,15**	122
71.	*Bálint*	*Tóth*	3	GMadDStred	8	20	–	–	**27,83**	28
72.	*Viktor*	*Materna*	2	GJarošeBO	5	12	11	0	**27,60**	43
73.	*Ján*	*Pavlech*	4	GsJozefaNM	–	15	12	–	**27,00**	27
74.	*Lukáš*	*Frk*	1	GNadAlejPH	–	20	7	–	**26,60**	27
75.	*Jan*	*Nekarda*	2	GUHradiště	9	17	–	–	**25,77**	74
76.	*Filip*	*Chudoba*	4	PORG PH	6	11	7	–	**24,14**	261
77.	*Michal*	*Chudoba*	3	GLitoměřPH	8	5	11	0	**23,63**	205
78.	*Klára*	*Zemanová*	1	PORG PH	0	11	11	–	**22,76**	23
79.	*Tomáš*	*Drobil*	3	G Dačice	5	12	6	0	**22,32**	265
80.	*Tomáš*	*Jelínek*	1	ArcibisGPH	–	22	–	–	**21,88**	22
81.	*Matej*	*Kvorka*	4	GŠkolDubni	10	5	5	–	**20,15**	108
82.	*Vít*	*Gaďurek*	3	PORG PH	8	9	3	–	**19,51**	198
83.	*Vojtěch*	*Dašek*	1	PORG PH	3	17	–	–	**19,50**	20
84.	*Anna*	*Jandová*	3	G Leg PB	8	10	–	–	**17,69**	58
85.	*Matěj*	*Holubička*	2	G Hořice	–	8	9	–	**17,51**	28
86.	*Karin*	*Janovjaková*	4	G Metod BA	–	17	–	–	**17,00**	17
87.	*Jaroslav*	*Paška*	3	G SkalicBA	16	–	–	–	**16,36**	16
88.	*Jaromír*	*Sladkovský*	3	PORG PH	11	5	–	–	**15,83**	93
89.	*Karel*	*Balej*	3	G Rokycany	–	15	–	–	**15,12**	55
90.	*Anna*	*Jerhotová*	2	GKepleraPH	15	–	–	–	**15,05**	15
91.	*Vilém*	*Raška*	2	GJarošeBO	5	9	–	–	**14,75**	15
92.	*Lukáš*	*Antoš*	0	G Mělník	–	13	–	–	**12,95**	17
93.	*Václav*	*Zvoníček*	2	GJarošeBO	–	–	5	7	**12,56**	20
94.	*Jan*	*Vondra*	2	G TýnNVlt	0	5	7	–	**11,56**	56
95.	*Jiří*	*Machyán*	3	G Vlašim	6	6	–	–	**11,06**	11
96.	*Alžběta*	*Neubauerová*	4	GNadKavaPH	5	6	–	–	**10,98**	181
97.	*Jaroslav*	*Paidar*	4	SPŠMasarLI	–	–	11	–	**10,82**	333
98.	*Jakub*	*Čurda*	3	PORG PH	4	6	–	–	**10,18**	83
99.	*Jakub*	*Šperka*	3	GTajBanBys	–	8	1	–	**9,47**	9
100.	*Vojtěch*	*Votruba*	0	26421	8	–	–	–	**8,34**	8
101.	*Kateřina*	*Ševčíková*	0	ZSSLOUP	8	–	–	–	**8,10**	21
102.–103.	*Petr*	*Aubrecht*	3	GHeyrovPH	8	–	–	–	**8,00**	8
102.–103.	*Martin*	*Zimka*	3	GTajBanBys	–	–	8	–	**8,00**	8
104.	*Oldřich*	*Jandl*	3	NPorg	7	–	–	–	**7,32**	98
105.	*Aleš*	*Horák*	1	SPŠ Třebíč	–	7	–	–	**6,79**	7
106.	*Kristýna*	*Prokopová*	2	G FrýdČTěš	7	–	–	–	**6,76**	7
107.	*Tomáš*	*Ježo*	3	GJHroncaBA	7	–	–	–	**6,65**	28
108.	*Václav*	*Nevyhoštěný*	2	GJarošeBO	–	–	5	–	**5,27**	5

109.	*Vanesa*	*Šmahovská*	4	G Metod BA	–	5	–	–	**5,00**	5
110.–111.	*Samuel*	*Šúr*	3	GTajBanBys	–	4	–	–	**4,23**	4
110.–111.	*Hana*	*Tomanová*	3		–	–	4	–	**4,23**	4
112.	*Kristian*	*Rigasz*	3	GJHroncaBA	4	–	–	–	**4,04**	44
113.	*Miroslav*	*Beláčik*	4	EvSpŠMar	–	3	1	–	**4,00**	4
114.	*Dušan*	*Klíma*	4		4	–	–	–	**3,98**	6
115.	*Světlana*	*Gareeva*	4	G Nymburk	2	–	–	–	**2,00**	2
116.	*Anna*	*Švarcová*	2	G Prachati	2	–	–	–	**1,87**	20
117.	*David*	*Ha*	3	MasG Plzeň	1	–	–	–	**1,43**	22
118.	*Johana*	*Dvořáková*	3	G Trutnov	–	1	–	–	**1,40**	39
119.–120.	*Adam*	*Hušek*	2	GRychnovKn	0	–	–	–	**0,00**	0
119.–120.	*Barbora*	*Zamazalová*	1	PORG PH	0	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*