Posloupnosti

1. jarní série — Termín odeslání: 5. února 2024

Úloha 1. (3 body)

Vítek vzpomíná na uplynulý rok. Na tabuli by chtěl napsat posloupnost 1012 přirozených čísel se součtem 2023. Trpí však bytostnou hrůzou z čísla 3. Chce proto napsat takovou posloupnost, v níž navíc žádný úsek několika po sobě jdoucích čísel nebude mít součet 3. Poraďte mu nějakou takovou posloupnost.

Úloha 2. (3 body)

Káťa si píše posloupnost přirozených čísel následovně: začne členem $a_1 = 1$ a následně vždy zvolí za a_{n+1} to nejmenší přirozené číslo takové, aby

$$\operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) > \operatorname{nsn}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Určete všechna přirozená čísla, která se v posloupnosti vyskytnou.

Úloha 3. (3 body)

Áďa má posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou různých reálných čísel. Víme, že i-tý prvek této poslopnosti je obsažen v souvislé monotónní[1] podposloupnosti délky alespoň $i+1$. Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od jistého členu monotónní.

Úloha 4. (5 bodů)

Arcimág Radeček dostal pod stromeček nekonečnou sadu závažíček. Sada obsahuje závažíčka o kladných lichých celočíselných vahách, přičemž každé číslo je zastoupeno právě jednou. Potom si napsal posloupnost a_2, a_3, …, kde a_n je počet způsobů, jak může Radeček ze svých závažíček poskládat váhu n. Dokažte, že tato posloupnost je neklesající.

Úloha 5. (5 bodů)

Venďa zkoumá posloupnost racionálních čísel zadanou členem $v_1 = 2024$ a předpisem

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{v_n}$$

pro všechna $n \geq 1$. Dokažte, že Venďa nedovede žádné v_n zapsat jako druhou mocninu racionálního čísla.

[1] Posloupnost je *monotónní*, pokud je celá rostoucí nebo celá klesající.

Úloha 6. (5 bodů)

Rozhodněte, zdali existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pro každé přirozené n.

Úloha 7. (5 bodů)

Petr a Miško našli arcimágovu knihu s postupem výroby čarovné posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: „Začněte s libovolnými přirozenými čísly jako prvními dvěma členy F_1, F_2, pak pro $n > 2$ počítejte a zapisujte $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.“

Petr si zvolil čísla $F_1 = 1$ a $F_2 = 2$, zatímco Miško si zvolil $F_1 = 2$, $F_2 = 1$ a pak každý popsal svojí posloupností celý svůj nekonečný pergamen. Určete, která čísla se vyskytla na obou pergamenech (ne nutně na stejné pozici v posloupnosti).

Úloha 8. (5 bodů)

Pro přirozené číslo $c > 1$ zaveďme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $x_1 = c$ a předpisu

$$x_{n+1} = c \cdot x_n + \sqrt{c^2 - 1} \cdot \sqrt{x_n^2 - 1}$$

pro všechna n. Dokažte, že každé x_n je celé číslo.

Analytická geometrie II

2. seriálová série — Termín odeslání: 5. února 2024

Úlohy této série jsou řazeny podle obtížnosti, nikoliv nutně podle pořadí témat v seriálu.

Úloha 1. (5 bodů)

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme čtverce ABB_1A_2, BCC_1B_2 a CAA_1C_2. Dále nechť K, L jsou body takové, že C_1CC_2K a B_1BB_2L jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelník AKL je pravoúhlý a rovnoramenný.

Úloha 2. (5 bodů)

Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$ má kružnici opsanou s poloměrem r. Nechť je H průsečík výšek trojúhelníka BCE. Dokažte, že platí $|AH| = 2r$.

Úloha 3. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC. Kružnice jemu vepsaná má střed v bodě I a dotýká se stran AB, AC po řadě v bodech D, E. Nechť jsou D', E' takové body, že DD' a EE' jsou průměry kružnice vepsané. Dále nechť je M střed strany BC a Q průsečík přímek $D'E'$ a BC. Dokažte, že přímky IM a IQ jsou na sebe kolmé.

Kamarádi

2. jarní série — Termín odeslání: 4. března 2024

Pokud se s kamarády v kontextu geometrie setkáváš poprvé, představí Ti je úvodní text k této sérii.[2]

Úloha 1. (3 body)

Na soustředění přijelo 24 účastníků, z nichž jedna byla Lenka. Někteří účastníci spolu už kamarádili, jiní ještě ne, přičemž kamarádství je vzájemné. Lenka seřadila ostatních 23 účastníků do řady tak, že n-tý účastník se na soustředění kamarádí s právě n účastníky. S kolika účastníky se kamarádí Lenka?

Úloha 2. (3 body)

Pět kamarádů v podobě bodů si hraje na schovávanou ve čtverci o rozměrech 10×10, v němž je umístěno pět překážek. Jedna má tvar kruhu se středem uprostřed čtverce a zbylé čtyři jsou čtvrtkruhy se středy v každém z rohů čtverce. Všechny překážky mají poloměr 3. Čtyři kamarádi se schovávají, pátý je hledá. Poraďte jim, jak se schovat, aby pátý kamarád viděl nejvýše jednoho z nich, ať už si ve čtverci stoupne kamkoli.

[2] *https://prase.cz/commentary/C/serie2j/uvod2j.pdf*

Úloha 3. (3 body)

Na Matfyz přišlo zkouškové. Všech $1+2+\cdots+n$ studentů bude skládat zkoušky v n učebnách, do kterých se vejde po řadě 1, 2, …, n studentů. Zkouškové má následující pravidla:

- Na začátku zkouškového nejsou žádní dva studenti kamarádi.
- Každý den zkouškového musí každý student skládat zkoušku v některé z učeben.
- Kdykoliv dva studenti složí zkoušku ve stejné učebně, stanou se po jejím skončení už po celý zbytek zkouškového kamarády.
- Z příkazu děkana je přísně zakázáno, aby dva studenti, kteří již jsou kamarády, skládali zkoušku ve stejné učebně.
- Jakmile v další den nelze studenty rozmístit do učeben tak, aby složili další zkoušku, zkouškové skončí.

V závislosti na n určete, kolik dní může zkouškové nejdéle trvat.

Úloha 4. (5 bodů)

V rovině je dán trojúhelník ABC. Bod B' vznikne překlopením B přes přímku AC, zatímco C' vznikne překlopením C přes přímku AB. Dokažte, že průsečík $B'C$ s $C'B$ leží na jedné přímce s vrcholem A a středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Úloha 5. (5 bodů)

Klárka chová n prasátek, z nichž každá dvě jsou buď vzájemně kamarádi, nebo vzájemně nepřátelé. Každé prasátko má přesně 2024 nepřátel. Navíc pro každé prasátko platí, že nepřítel jeho kamaráda je také jeho nepřítel. Určete všechny možné hodnoty n.

Úloha 6. (5 bodů)

Uvažme v trojúhelníku ABC kamarády P, Q splňující $|AP| = |AQ|$. Dokažte, že B, C, P, Q leží na kružnici.

Úloha 7. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC, uvnitř kterého leží bod F splňující $|\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle AFB|$. Dokažte, že se přímky, které dostaneme zobrazením přímek AF, BF, CF po řadě v osových souměrnostech dle přímek BC, AC, AB, protnou v jednom bodě.

Úloha 8. (5 bodů)

Nechť je H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníku ABC s kružnicí opsanou ω. Body E a F leží postupně na stranách AB a AC tak, že $AEHF$ je rovnoběžník. Přímka EF protne ω v bodech X a Y. Označme jako Z ten bod, pro nějž je úsečka AZ průměrem ω. Dokažte, že H je ortocentrum trojúhelníku XYZ.