Být, či nebýt

1. jarní série — Termín odeslání: 5. února 2018

Úloha 1. (3 body)
Dánsko a Anglie spolu hrály fotbal. Dánský tým dal celkem osm gólů, kdežto anglický pět. Musel během utkání existovat okamžik, kdy se počet gólů, které již Anglie dala, rovnal počtu gólů, které Dánsko ještě dá?

Úloha 2. (3 body)
Na tabuli je napsáno číslo 42. Pokud je na tabuli napsané přirozené číslo n, může Honza zvolit dvě přirozená čísla a, b se součtem n a nahradit číslo na tabuli číslem ab. Existuje posloupnost tahů, kterou se Honzovi povede vytvořit na tabuli číslo 2018?

Úloha 3. (3 body)
Existuje čtveřice bodů v rovině taková, že každá z ní vybraná trojice bodů je osově symetrická[1], ale celá čtveřice žádnou osu symetrie nemá?

Úloha 4. (5 bodů)
Na matfyzu od 8 do 16 hodin pracuje n lidí. Každý z nich je během pracovní doby buď na matfyzu, nebo v kavárně. Přechod mezi těmito místy netrvá žádný čas a na každém z nich může člověk zůstat libovolně krátkou dobu. Matfyzáci spolu nechtějí trávit moc času. Pro která n umíme zařídit, aby spolu žádní dva zaměstnanci za celou pracovní dobu nestrávili více než čtyři hodiny (sčítá se čas na pracovišti i v kavárně)?

Úloha 5. (5 bodů)
Na kružnici leží několik hrobů. Do každého z nich dal Hamlet několik lebek (klidně žádnou), k nějakému neprázdnému se postavil a začal si hrát podle následujících pravidel. Pokud u sebe nemá žádné lebky, vezme si všechny z hrobu, u kterého právě stojí, a hned se posune o jeden dál. V opačném případě dá jednu lebku do hrobu, u něhož se nachází, a pokud ještě nějakou drží, přejde opět k dalšímu hrobu. Dokažte, že ať Hamlet rozmístí lebky jakkoli a postaví se kamkoli, budou po nějaké době počty lebek v jednotlivých hrobech stejné jako na začátku.

Úloha 6. (5 bodů)
Existuje nekonečná posloupnost kladných reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots$ taková, že pro každé přirozené $n \geq 2$ platí $x_n = \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_{n-2}}$?

Úloha 7. (5 bodů)
Rozhodněte, zda mohou být (či nebýt) dva překrývající se konvexní čtyřúhelníky A a B a bod X ležící v obou z nich[2] tak, aby byly splněny následující dvě podmínky:

(i) Pro každou přímku vedenou bodem X platí, že její část v A je kratší než její část v B.
(ii) Obsah A je alespoň 1,9krát větší než obsah B.

---

[1] Skupinu bodů považujeme za osově symetrickou, i když všechny leží na jedné přímce.
[2] Bod X může ležet i na hranici čtyřúhelníku.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď $S = \{-1; 1\}$. Funkce $\mathrm{sg} : \mathbb{R} \to S$ dává $\mathrm{sg}(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $\mathrm{sg}(x) = -1$ pro $x < 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ mějme čísla $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$ a pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ definujme

$$y_i = \mathrm{sg}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) \qquad \text{a} \qquad z = \mathrm{sg}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i y_i\right).$$

Rozhodněte, zda pro každé liché n existují taková $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$, že pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ platí $z = x_1 x_2 \cdots x_n$.

Teorie grup II – Procitnutí symetrií

2. seriálová série — Termín odeslání: 5. února 2018

Úloha 1. (5 bodů)

Kolika způsoby můžeme nabarvit krychli, máme-li k dispozici padesát odstínů šedi? Stěnu natřeme vždy celou stejným odstínem a použité odstíny nemusejí být různé; dvě obarvení, která se liší pouze natočením v prostoru, považujeme za totožná.

Úloha 2. (5 bodů)

Ukažte, že pokud existuje nějaká funkce $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{Z}_n$ vztahy

(i) $f(x) \neq x$,
(ii) $f(f(x)) = x$,
(iii) $f(f(f(x+1)+1)+1) = x$,

potom n dává zbytek dva po dělení čtyřmi.

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť G je konečná grupa taková, že pro každou její vlastní podgrupu H (tj. $H \neq G$) existuje podgrupa K, která splňuje $H \leq K \leq G$ a má v G prvočíselný index. Označme jako p největší prvočíslo, které dělí $|G|$. Dále ať je P libovolná sylowovská p-podgrupa grupy G. Ukažte, že je P normální v G.

Čtverce a krychle

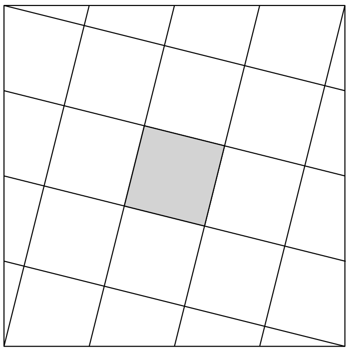
2. jarní série | Termín odeslání: 5. března 2018

Úloha 1. (3 body)

Zapište za sebe v nějakém pořadí čísla 1 až 16 tak, aby součet každých dvou sousedních čísel byl čtverec[3].

Úloha 2. (3 body)

Máme čtverec o straně délky jedna. Každou jeho stranu rozdělíme na čtyři stejné části a vzniklé body pospojujeme způsobem naznačeným na obrázku. Určete obsah malého šedého čtverečku.



Úloha 3. (3 body)

Kuba a Tonda hrají hru na tabulce velikosti 100×3 čtverečků. Střídavě na její políčka pokládají dominové kostičky 2×1. Začínající Kuba je pokládá tak, že strana domina o délce 2 je rovnoběžná s delší stranou tabulky, zatímco Tonda naopak. Nikdo z nich nesmí položit domino na již zabrané políčko. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Ukažte, že Kuba může vyhrát, ať hraje Tonda jakkoli dobře.

Úloha 4. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 je rozestavěno osm věží, které se vzájemně neohrožují. Pro každou dvojici věží změříme délku spojnice středů políček, na nichž tyto věže stojí. Dokažte, že některé dvě z těchto vzdáleností jsou nutně stejné.

Úloha 5. (5 bodů)

Kuba si chtěl hodit dvěma hracími kostkami, ale protože se nudil, tak nejdříve sundal z jejich stěn všechna čísla, dal je do klobouku a zamíchal. S jakou pravděpodobností hodil v součtu 7, pokud víme, že všech dvanáct čísel před hodem náhodně nalepil zpět na kostky (na každou stěnu jedno)?

[3] Čtvercem nazýváme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Úloha 6. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 jsou zapsána čísla $1, \dots, 64$, přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?

Úloha 7. (5 bodů)

Mějme n-prvkovou množinu M a vyberme z ní n po dvou různých podmnožin. Dokažte, že existuje prvek $x \in M$ takový, že po jeho odebrání z každé z vybraných podmnožin, která ho obsahuje, získáme opět n různých množin.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme nekonečnou krychličkovou síť plnou neobarvených krychliček. Filip a Rado hrají hru. Filip začíná a oba hráči se střídají v tazích. Filipův tah spočívá v obarvení dosud nezabarvené krychličky na červeno. Rado ve svém tahu vybere celou rovinnou vrstvu krychliček (kolmou na jednu ze tří os prostoru), v níž žádná krychlička není červená, a obarví je všechny na modro. Rozhodněte, pro která n může Filip nezávisle na Radových tazích dosáhnout stavu, kdy bude existovat n červených sousedících krychliček ve směru některé z os prostoru.