Být či nebýt

1. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Dánsko a Anglie spolu hrály fotbal. Dánský tým dal celkem osm gólů, kdežto anglický pět. Musel během utkání existovat okamžik, kdy se počet gólů, které již Anglie dala, rovnal počtu gólů, které Dánsko ještě dá?

(Tonda Le)

Řešení:

Označme si A počet gólů, které dala Anglie, a D počet gólů, které dalo Dánsko. Zadání se ptá, zda nastane moment, kdy $A = 8 - D$, po úpravě $A + D = 8$. Dohromady daly oba týmy $A + D = 13$ gólů a protože nelze dát dva góly naráz, mění se součet $A + D$ při každé změně skóre právě o jedna. Součet $A + D$ se mění od 0 do 13 po jedné, tedy určitě v nějaký okamžik $A + D = 8$. V tento okamžik se počet gólů, které Anglie dala, rovná počtu gólů, které Dánsko ještě dá.

Poznámky:

Drtivá většina řešení byla stejná jako to vzorové. Někdy se objevila řešení využívající brutální síly výpisu možností, kterých naštěstí nebylo tolik, takže tato cesta až tak pracná nebyla. Byl jsem při bodování velmi benevolentní a i ne zcela přesně popsané řešení jsem uznal za plný počet bodů. Důvod této benevolence tkvěl v tom, že správná myšlenka v řešeních byla, jen formulace byly leckdy pochybné.

(Jan Kadlec)

Úloha 2.

Na tabuli je napsáno číslo 42*. Pokud je na tabuli napsané přirozené číslo n, může Honza zvolit dvě přirozená čísla a, b se součtem n a nahradit číslo na tabuli číslem ab. Existuje posloupnost tahů, kterou se Honzovi povede vytvořit na tabuli číslo* 2018*?*

(Honza Krejčí)

Řešení:

Libovolné přirozené $n > 1$ můžeme zapsat jako $n = 1 + (n - 1)$ a na tabuli dostat součin $1 \cdot (n - 1) = n - 1$. Jakékoli číslo tak můžeme libovolně dlouho o jedna zmenšovat. Stačí nám tedy získat nějaké číslo větší nebo rovno 2018, číslo 2018 pak dostaneme právě popsaným zmenšováním.

Takové číslo můžeme vytvořit například těmito dvěma kroky: Nejprve z $42 = 21 + 21$ dostaneme $21 \cdot 21 = 441 = 220 + 221$, z čehož následně vytvoříme $220 \cdot 221 = 48620$.

Posloupnost tahů, kterou se Honza může dostat od 42 k 2018, tedy existuje.

Poznámky:

S řešením (až na pár chyb ve sčítání dvouciferných čísel) neměl problém téměř nikdo. Zato dost řešitelů si ab v zadání vyložilo jako napsání čísel a a b za sebe místo jejich součinu. Nakonec jsme se shodli, že takovou interpretaci také uznáme, takže i za správné řešení pozměněné úlohy bylo možné získat plný počet bodů. Nicméně obvykle se výrazem ab myslí vždy součin, pokud není explicitně řečeno jinak.

V zadání byly dvě speciální hodnoty, ale obecně se umíme z libovolného přirozeného $n > 4$ dostat na libovolné větší číslo třeba tak, že opakovaně volíme $a = 2, b = n-2$. Pak $2 \cdot (n-2) = 2n-4 > n$. Takže úloha je řešitelná i pro libovolné $k > 4$ místo 42 a libovolné přirozené l místo 2018.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 3.

Existuje čtveřice bodů v rovině taková, že každá z ní vybraná trojice bodů je osově symetrická[1]*, ale celá čtveřice žádnou osu symetrie nemá?*

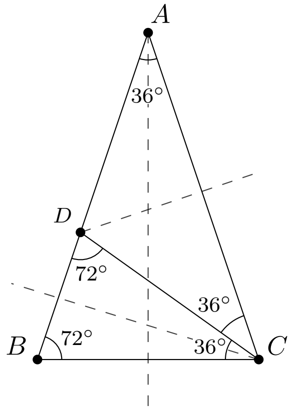
(Honza Krejčí)

Řešení (volně podle Lenky Kopfové):
Ano, existuje. Víme, že tři body jsou osově symetrické, pokud tvoří rovnoramenný trojúhelník nebo pokud leží na jedné přímce (každý bod se v tomto případě zobrazí symetrií sám na sebe podle přímky, na které všechny leží).

Mějme trojúhelník ABC s úhly $36°$, $72°$, $72°$. Bod D zvolíme na přímce AB tak, aby platilo $|BC| = |CD|$. Tím dostaneme rovnoramenný trojúhelník CDB, a tedy $|\sphericalangle BDC| = 72°$. Z toho plyne, že D leží na úsečce AB – nerovnost $90° > 72°$ zaručuje, že D leží na polopřímce BA, a nerovnost $72° > 36°$ zaručuje, že D leží na polopřímce AB. Nyní už snadno dopočteme velikost úhlu ACD, která vyjde $36°$. Z toho plyne, že i $\triangle DCA$ je rovnoramenný.

Všechny trojice bodů jsou osově symetrické: ABC, DCA, CDB tvoří rovnoramenné trojúhelníky a ABD leží na jedné přímce. Zároveň celá čtveřice bodů žádnou osu symetrie nemá. Pokud vám toto tvrzení nepřijde zřejmé, můžeme ho nahlédnout například takto:

Aby se každý bod zobrazil podle osy sám na sebe, musely by všechny ležet v jedné přímce, což evidentně neplatí. Aby symetrie prohodila dva body a zbylé dva nechala na svém místě, muselo by platit, že jedna z přímek tvořená dvojicí bodů je osou úsečky mezi zbývajícími body. To ale také určitě neplatí, protože žádné dvě úsečky na sebe nejsou kolmé. Poslední možností je, že symetrie prohodí dvě dvojice bodů. K tomu by bylo nutné, aby dvě osy stran splývaly. To také neplatí, protože žádné dvě strany nejsou rovnoběžné, a tedy ani jejich osy nemůžou být rovnoběžné a splývat.



[1]Skupinu bodů považujeme za osově symetrickou, i když všechny leží na jedné přímce.

Poznámky:

Úloha se ukázala být docela těžká, správné řešení nám poslalo jen 13 řešitelů. Téměř všechna špatná řešení přitom ztroskotala na podobném problému. Psali jste, že aby byly tři body osově souměrné, musí tvořit rovnoramenný trojúhelník, a z toho jste nějakým způsobem došli k závěru, že i celá čtveřice musí mít osu symetrie. Už předpoklad ovšem nebyl správný. Body jsou osově symetrické i v případě, že všechny leží na jedné přímce. A nemusí ani jeden z nich být středem úsečky tvořené zbývajícími dvěma, protože tyto body jsou symetrické podle přímky, na které leží (každý se symetrií zobrazuje sám na sebe). Úloha byla v tomto směru velmi záludná, a tak jsme se vám v poznámce pod čarou snažili trochu napovědět, že body ležící na jedné přímce jsou vždy osově symetrické.

(Michal Töpfer)

Úloha 4.

Na matfyzu od 8 *do* 16 *hodin pracuje* n *lidí. Každý z nich je během pracovní doby buď na matfyzu, nebo v kavárně. Přechod mezi těmito místy netrvá žádný čas a na každém z nich může člověk zůstat libovolně krátkou dobu. Matfyzáci spolu nechtějí trávit moc času. Pro která* n *umíme zařídit, aby spolu žádní dva zaměstnanci za celou pracovní dobu nestrávili více než čtyři hodiny (sčítá se čas na pracovišti i v kavárně)?*

(Jakub Löwit)

Řešení:

Ukážeme, že to můžeme zařídit pro každé n. Matfyzáky si označíme M_0, M_1, ... ,M_{n-1}. Matfyzák M_i začne svůj den na matfyzu a každých $8 \cdot 2^{-i}$ hodin přejde na druhé místo, než na kterém se právě nachází. To znamená, že matfyzák M_0 bude celou pracovní dobu na matfyzu, M_1 bude čtyři hodiny na matfyzu a pak čtyři v kavárně, M_2 dvě na matfyzu, dvě v kavárně a pak to samé ještě jednou a tak dále.

Ukážeme, že matfyzáci M_i a M_j pro $i \neq j$ spolu strávili právě 4 hodiny. Nechť bez újmy na obecnosti platí $i < j$. Matfyzák M_j pak střídá místa přesně 2^{j-i}krát častěji než M_i. Protože $j-i$ je alespoň jedna, je 2^{j-i} sudé číslo, a tedy bez ohledu na to, kde je matfyzák M_i v daném úseku mezi dvěma svými přechody, stráví s ním matfyzák M_j právě půlku této doby. To ale platí v každém úseku mezi dvěma přechody matfyzáka M_i, a tedy i pro celou pracovní dobu.

Poznámky:

Asi tři čtvrtiny úspěšných řešitelů postupovaly přibližně podle vzoráku. Ve velké části těchto řešení ale chyběl jakýkoli náznak důkazu, že konstrukce funguje. Protože rozhodně není úplně triviální, strhl jsem v takových případech jeden bod.

Ostatní řešitelé typicky řekli, že vyzkouší všechny možné kombinace, jak může být polovina zaměstnanců (zaokrouhlená pro liché n) na matfyzu a polovina v kavárně, a každou z nich nechají probíhat po stejně dlouhou dobu. Při aplikaci tohoto postupu dokonce dokazovaná nerovnost vyšla ostře. Bohužel tato cesta obsahovala poměrně hodně technických úprav s kombinačními čísly, a pokud řešitel nevymyslel, jak to obejít, navíc i potřebu řešit úlohu zvlášť pro liché a sudé n.

K mému překvapení nejelegantnější řešení, které přišlo, patřilo do druhé kategorie. *Martinovi Zimenovi* se úspěšně podařilo obejít všechny technické výpočty mimo jiné tím, že uvažoval za různá rozmístění i ta, která se lišila pouze pořadím pracovníků v kavárně či na matfyzu (přestože stran toho, kdo je s kým, jsou tato rozmístění stejná), čímž si vysloužil jeden kladný imaginární bod.

Pozitivně mě překvapilo, že ani jediný řešitel se nepokusil dokázat, že pro nějaká n již konstrukce neexistuje.

(Viki Němeček)

Úloha 5.

Na kružnici leží několik hrobů. Do každého z nich dal Hamlet několik lebek (klidně žádnou), k nějakému neprázdnému se postavil a začal si hrát podle následujících pravidel. Pokud u sebe nemá žádné lebky, vezme si všechny z hrobu, u kterého právě stojí, a hned se posune o jeden dál. V opačném případě dá jednu lebku do hrobu, u něhož se nachází, a pokud ještě nějakou drží, přejde opět k dalšímu hrobu. Dokažte, že ať Hamlet rozmístí lebky jakkoli a postaví se kamkoli, budou po nějaké době počty lebek v jednotlivých hrobech stejné jako na začátku.

(Tonda Le)

Řešení:

Buď n počet hrobů. Jako *stav* nazveme uspořádanou $(n + 2)$-tici čísel, složenou z počtů lebek v n jednotlivých hrobech; počtu lebek, které právě drží Hamlet; a polohy Hamleta (tj. čísla hrobu, u kterého Hamlet právě stojí). To nám bude popisovat situaci těsně před tím, než Hamlet učiní další krok (tj. než se přesune k dalšímu hrobu). Všimneme si, že počet různých *stavů* je konečný. Máme totiž konečně mnoho lebek, takže prvních $n + 1$ čísel popisujících *stav* je shora omezeno počtem lebek a zdola nulou a Hamletova pozice může nabývat jen n různých hodnot. Dále si uvědomíme, že ze zadání má Hamlet vždy jasně daný následující krok.

Celou situaci si představíme jako orientovaný graf[2], kde vrcholy jsou *stavy*. Ze *stavu* A do *stavu* B vede šipka právě tehdy, když Hamlet ze *stavu* A přejde do *stavu* B. Díky tomu, že má Hamlet vždy jednoznačně určený následující krok, víme, že z každého *stavu* vede právě jedna šipka.

Dále ukážeme, že v každém *stavu* umíme jednoznačně určit předcházející *stav*, pokud existuje – neboli že do každého vrcholu v orientovaném grafu vede nanejvýš jedna šipka.

Uvažujme tedy nějaký *stav*, do kterého vede šipka. Pokud se Hamlet vyskytuje u hrobu, ve kterém jsou nějaké lebky, znamená to, že tam právě jednu přidal. Předchozí stav tedy najdeme tak, že Hamlet z tohoto hrobu jednu lebku vezme a přejde o hrob zpátky. Pokud se Hamlet vyskytuje u prázdného hrobu, znamená to, že z něj právě musel vzít všechny lebky. Všechny je tam tedy vrátí. (Musel nějaké mít, protože jinak by se nedalo jít o krok zpět.) Tím ovšem neudělá plný krok zpět, protože každý krok začíná tím, že Hamlet přejde k novému hrobu. Jsme ale opět ve stejné situaci jako předtím (Hamlet stojí u hrobu, ve kterém jsou nějaké lebky) a o krok zpět se jednoznačně vrátíme způsobem, jaký je popsán výše.

Takto dokážeme jednoznačně určit předcházející *stav*, to znamená, že v našem orientovaném grafu vede do každého vrcholu nanejvýš jedna šipka. Díky tomu, že je *stavů* konečně mnoho, víme, že po určitém počtu kroků se některý *stav* zopakuje. Protože následující *stav* je jednoznačně určený, bude se odteď Hamlet pohybovat cyklicky. Ukážeme, že počáteční *stav* musí být v tomto cyklu.

Pro spor nechť není v tomto cyklu. Pak existuje první *stav*, nazvěme jej A, který Hamlet navštívil a je obsažen v cyklu. Označíme předcházející *stav* v cyklu B_1 a předcházející *stav* na Hamletově cestě B_2. Z předpokladu není B_2 v cyklu, tedy B_1 a B_2 se liší. To je ovšem spor, protože bychom se uměli do *stavu* A dostat ze dvou různých *stavů*.

Tím jsme ukázali, že počáteční *stav* je vždy obsažen v cyklu, a tedy se po nějakém počtu kroků zopakuje.

Poznámky:

Většina přišlých řešení byla správná. Body jsem snížila za řešení, kde řešitel zapomněl dokázat, že předcházející stav je určen jednoznačně, nebo zapomněl uvést, že stavů je jen konečně mnoho.

(„madam Verča“ Hladíková)

[2]Pokud nevíš, co je orientovaný graf, tak si stačí představovat obrázek s puntíky nazývanými vrcholy a šipkami nazývanými hranami.

Úloha 6.

Existuje nekonečná posloupnost kladných reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \dots$ taková, že pro každé přirozené $n \geq 2$ platí $x_n = \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_{n-2}}$?

(Rado van Švarc)

Řešení:

Pro spor předpokládejme, že taková posloupnost existuje. Pokud by pro nějaké $i \in \mathbb{N}$ bylo $x_i \leq x_{i-1}$, pak $\sqrt{x_i} \leq \sqrt{x_{i-1}}$, a tedy $x_{i+1} = \sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}} \leq 0$, což nelze. Posloupnost je tedy (ostře) rostoucí.

Pro každé $i \in \mathbb{N}$ také platí

$$x_i < x_{i+1} = \sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}} < \sqrt{x_i},$$

tudíž $x_i < \sqrt{x_i}$, a tedy $x_i < 1$.

Nakonec využijeme toho, že $x_0 > 0$. Označme[3] $n = \left\lceil \frac{1}{x_0} \right\rceil + 1$ a odhadněme dvěma způsoby součet $\sum_{i=2}^{n} x_i$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} x_i &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_0} + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_{n-2}} \\ &= \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_0} < \sqrt{x_{n-1}} < 1,\end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_i > \sum_{i=2}^{n} x_0 = \left(\left\lceil \frac{1}{x_0} \right\rceil + 1 - 1 \right) \cdot x_0 \geq \frac{x_0}{x_0} = 1.$$

Tyto dva odhady jsou vzájemně ve sporu, tudíž taková posloupnost nemůže existovat.

Poznámky:

Úloha byla vcelku přímočará, většina řešení postupovala obdobně jako vzorové. Druhou oblíbenou možností bylo využití pokročilého tvrzení, že každá rostoucí shora omezená posloupnost konverguje, a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n-1}} < x_0$, což je opět spor.

U špatných řešení byl často problém se správným uchopením pojmu nekonečno – obvykle ve smyslu: „Tuto operaci můžeme provést nekonečněkrát.“ Buď to ale nebylo zdůvodněno, nebo to dokonce nebylo vůbec možné.

(Tomáš Novotný)

Úloha 7.

Rozhodněte, zda mohou být (či nebýt) dva překrývající se konvexní čtyřúhelníky A a B a bod X ležící v obou z nich[4] tak, aby byly splněny následující dvě podmínky:

(i) *Pro každou přímku vedenou bodem X platí, že její část v A je kratší než její část v B.*

(ii) *Obsah A je alespoň 1,9krát větší než obsah B.*

(Rado van Švarc)

[3] $\lceil x \rceil$ značí horní celou část z čísla x, tj. nejmenší celé číslo takové, že není menší než x.

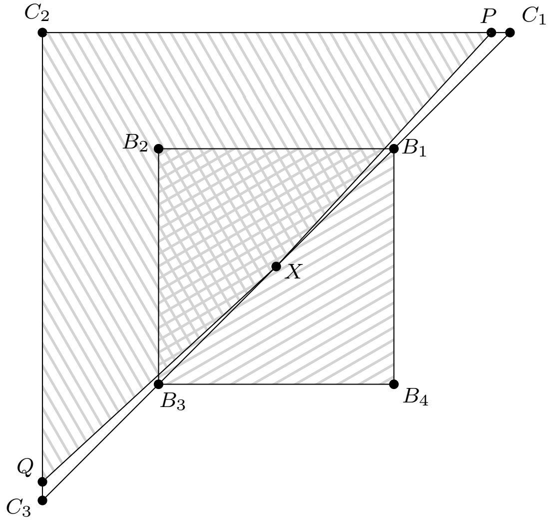
[4] Bod X může ležet i na hranici čtyřúhelníku.

Řešení:
Buď $B_1B_2B_3B_4$ čtverec se stranou délky 1, jehož střed označíme X. Nechť jsou C_1, C_2, C_3 obrazy bodů B_1, B_2, B_3 ve stejnolehlosti se středem X a koeficientem $1,99$. Platí, že obsah trojúhelníku $C_1C_2C_3$ je $\frac{1,99^2}{2} > 1,9$. Buď $x = \frac{1,99^2}{2} - 1,9$. Nechť P, resp. Q, leží na úsečce C_1C_2, resp. C_2C_3 tak, že obsah trojúhelníku C_1PX, resp. C_2QX je nanejvýš $\frac{x}{2}$.

Za A zvolíme čtyřúhelník PC_2QX a za B čtverec $B_1B_2B_3B_4$. Ukážeme, že vyhovují zadaným podmínkám.

Zjevně B má obsah 1 a A má obsah alespoň $\frac{1,99^2}{2} - 2 \cdot \frac{x}{2} = 1,9$, tedy A a B splňují druhou podmínku.

Nyní buď ℓ přímka procházející X. Pokud protíná A jenom v bodě X, je podmínka zjevně splněna. V opačném případě nechť protíná obvod A krom bodu X také v bodě Y a nechť Z je průsečík úsečky XY s obvodem B. Ze stejnolehlosti platí, že $|XY| = 1,99|XZ|$. Zároveň ale protože X je střed B, protíná ℓ čtverec B v úsečce délky $2|XZ|$. Tedy část ℓ která leží v A (tj. XZ) je kratší, než část ℓ, která leží v B, čímž máme hotovo.



Poznámky:
Většina řešení buď nesprávně tvrdila, že daný útvar neexistuje, nebo ho úspěšně zkonstruovala. Všechny konstrukce byly podobné té vzorové, ačkoliv někteří použili jiný typ trojúhelníka (tj. například jejich $C_1C_2C_3$ byl rovnostranný a B vznikl slepením dvou menších takových trojúhelníčků do kosočtverce). *(Rado van Švarc)*

Úloha 8.

Buď $S = \{-1; 1\}$. Funkce $\operatorname{sg} : \mathbb{R} \to S$ dává $\operatorname{sg}(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $\operatorname{sg}(x) = -1$ pro $x < 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ mějme čísla $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$ a pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ definujme

$$y_i = \operatorname{sg}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right) \qquad \text{a} \qquad z = \operatorname{sg}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i y_i\right).$$

Rozhodněte, zda pro každé liché n existují taková $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$, že pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ platí $z = x_1x_2 \cdots x_n$.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme si $n = 2k+1$ a $M = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ukážeme, že pro každé n taková čísla $a_{i,j}$, b_i existují. Pro každé i položíme $b_i = 1$. Dále pokud $i-j$ dává po dělení n zbytek menší než k, zvolíme $a_{i,j} = -1$, jinak $a_{i,j} = 1$. Tvrdíme, že tato volba konstant skutečně vyhovuje zadání.

Buď α počet i, pro která je $x_i = -1$. Zjevně chceme ukázat, že $z = (-1)^{\alpha}$. Protože všechna $a_{i,j}$, b_i, x_i i y_i jsou lichá (jsou to ± 1) a n je liché, jsou i všechny uvažované součty liché, a tedy nikdy nebudeme pracovat se $\operatorname{sg}(0)$. Z toho plyne, že tvrzení stačí ukázat pro případ, kdy je α liché. (Tj. chceme pro tento případ ukázat $z = -1$.) Pro sudé α bychom se totiž podívali na posloupnost $x'_i = -x_i$, která by příslušný počet -1 měla lichý. Pro ni by platilo $z' = -1$. Zároveň protože sg je lichá funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a žádný ze součtů nenabývá nuly, plyne z $x'_i = -x_i$ také $y'_i = -y_i$, a tedy i $z' = -z$, z čehož $z = 1$, což je přesně to, co jsme chtěli.

Dvojici čísel (i,j) nyní nazveme příjemnou, pokud $i, j \in M$ a $i - j \equiv \pm k \pmod{n}$. Ukážeme, že pokud (i,j) je příjemná dvojice, potom $y_i = -1$ nebo $y_j = -1$.

Nejprve ukážeme, jak z tohoto pozorování již plyne požadované tvrzení. Nechť skutečně pro každou takovou dvojici je $y_i = -1$ nebo $y_j = -1$. Buď $y_a = -1$ (takové existuje – stačí vzít buď y_1, nebo y_{1+k}). Potom (pokud bereme indexy modulo n) platí $y_{a+2pk-k} + y_{a+2pk} \leq 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i = y_a + \sum_{p=1}^{k} (y_{a+2pk-k} + y_{a+2pk}) \leq -1$, z čehož už plyne $z = -1$.

Buď tedy (i,j) příjemná dvojice, BÚNO nechť $j \equiv i + k \pmod{n}$. Pro spor předpokládejme že $y_i = 1 = y_j$. Buď S_i, resp. S_j, množina všech s takových, že $a_{i,s}$, resp. $a_{j,s}$, je rovno -1. Povšimněme si, že kdyby pro nějaké s bylo $a_{i,s} = -1 = a_{j,s}$ pak jak $i - s$, tak $j - s = i - s + k$ dává zbytek po dělení n menší nebo roven k, což se nemůže stát. Proto jsou množiny S_i a S_j disjunktní.

Buď A množina těch s, pro která je $x_s = -1$. Označme si jako c_i a c_j velikosti množin $A \cap S_i$ a $A \cap S_j$. Zjevně $|A| = \alpha$. Protože S_i obsahuje ta s, pro která je $a_{i,s} = -1$, neboli ta s, pro která je zbytek $i - s$ po dělení n menší než k, je $|S_i| = k$. Protože $|A \cap S_i| + |(M \setminus A) \cap S_i| = |S_i| = k$, platí $|(M \setminus A) \cap S_i| = k - c_i$. Protože $|A \cap S_i| + |A \cap (M \setminus S_i)| = |A| = \alpha$, je $|A \cap (M \setminus S_i)| = \alpha - c_i$. Nakonec protože $|A \cap (M \setminus S_i)| + |(M \setminus A) \cap (M \setminus S_i)| = |M \setminus S_i| = k+1$, je $|(M \setminus A) \cap (M \setminus S_i)| = k + 1 - \alpha + c_i$.

Platí $\sum_{s=1}^{n} a_{i,s} x_s = |A \cap S_i| - |(M \setminus A) \cap S_i| - |A \cap (M \setminus S_i)| + |(M \setminus A) \cap (M \setminus S_i)| = c_i - (k - c_i) - (\alpha - c_i) + (k + 1 - \alpha + c_i) = 4c_i - 2\alpha + 1$. Protože $y_i = 1$, je tento součet kladný, tedy $4c_i - 2\alpha + 1 \geq 1$, což nám dává $2c_i \geq \alpha$. Díky tomu, že $2c_i$ je sudé a α je liché, je dokonce $2c_i \geq \alpha + 1$. Analogicky $2c_j \geq \alpha + 1$. Z toho sečtením dostáváme $c_i + c_j \geq \alpha + 1$. Potom $\alpha = |A| = |S_i \cap A| + |S_j \cap A| + |(M \setminus (S_i \cup S_j)) \cap A| \geq c_i + c_j \geq \alpha + 1$, což je spor.

Poznámky:

Velmi příjemně mne překvapilo, že všechna došlá řešení byla až na drobnosti správně.

(Rado van Švarc)