Pravděpodobnost I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Danil má doma 29 plyšových tuleňů. Víme, že alespoň jeden tuleň je chlupatý a alespoň jeden je roztomilý. Danil si všiml, že když jednoho tuleně náhodně vybere, jsou jevy „tuleň je chlupatý“ a „tuleň je roztomilý“ nezávislé. Dokažte, že jsou všichni Danilovi tuleni chlupatí nebo všichni roztomilí nebo obojí.

(Vašek Rozhoň)

ŘEŠENÍ:
Označme R jev „vybraný tuleň je roztomilý“ a C jev „vybraný tuleň je chlupatý“, pak $|R|$ bude počet roztomilých a $|C|$ počet chlupatých tuleňů. Použijeme nezávislost jevů R a C a upravíme vztahy:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R \cap C) &= \mathrm{P}(R) \cdot \mathrm{P}(C), \\ \frac{|R \cap C|}{29} &= \frac{|R|}{29} \cdot \frac{|C|}{29}, \\ |R \cap C| &= \frac{|R||C|}{29}. \end{aligned}$$

Protože počet roztomilých chlupatých tuleňů je určitě celočíselný a 29 je prvočíslo, musí platit, že 29 dělí $|R|$ nebo že 29 dělí $|C|$. Ze zadání je ale $0 < |R| \leq 29$ a $0 < |C| \leq 29$, proto 29 dělí $|R|$, právě když $|R| = 29$, podobně pro $|C|$. Danil tedy musí mít 29 roztomilých tuleňů nebo 29 chlupatých tuleňů.

POZNÁMKY:
Při řešení úlohy stačilo správně využít definici nezávislosti dvou jevů a všimnout si, že 29 je prvočíslo. Většina důkazů se velmi podobala vzorovému, jen málo bylo řešitelů, kteří se v úvahách o tuleních zamotali. Těm doporučuji znovu si přečíst kapitolu seriálu o nezávislosti.

(Bára Kociánová)

Úloha 2.

Danil s Vaškem našli úlohu do seriálu a teď se ji snaží vyřešit. Jelikož nejsou moc zdatní v numerických výpočtech, je šance, že Vašek vyřeší úlohu správně, rovna $\frac{3}{16}$, zatímco pro Danila to je $\frac{4}{11}$. Víme, že Vaškův a Danilův výsledek jsou na sobě nezávislé. Také víme, že spletou-li se oba, vyjde jim totéž číslo s pravděpodobností $\frac{1}{273}$. Pokud vyšel Danilovi i Vaškovi stejný výsledek, jaká je pravděpodobnost, že je tento výsledek správný?

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:
Jev „Danil vyřešil úlohu správně“ si označíme D, jev „Vašek vyřešil úlohu správně“ bude V a konečně jev „oběma vyšel stejný výsledek“ označíme S. Zadání po nás žádá spočítat pravděpodobnost

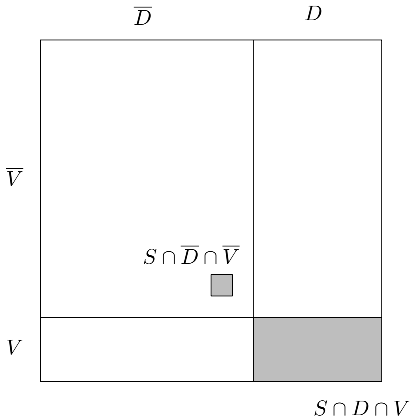
toho, že nastaly oba jevy D a V za podmínky, že nastal jev S, tedy $\mathrm{P}(D\cap V|S)$. Z definice podmíněné pravděpodobnosti máme $\mathrm{P}(D\cap V|S) = \frac{\mathrm{P}(D\cap V\cap S)}{\mathrm{P}(S)}$. Stačí spočítat hodnotu čitatele i jmenovatele.

Víme, že Danilův i Vaškův výsledek jsou na sobě nezávislé, tedy $\mathrm{P}(D\cap V) = \mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}(V)$. Dále vyšel-li oběma správný výsledek, mají jej oba stejný, tedy $\mathrm{P}(D\cap V\cap S) = \mathrm{P}(D\cap V)\cdot\mathrm{P}(S|D\cap V) = \mathrm{P}(D)\cdot\mathrm{P}(V)\cdot\mathrm{P}(S|D\cap V) = \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{16}\cdot 1 = \frac{3}{44}$.

Dále si povšimněme, že vyšel-li jednomu chlapci správný výsledek a druhému špatný, musely se tyto výsledky lišit, tedy $\mathrm{P}(S\cap\overline{D}\cap V) = \mathrm{P}(S\cap D\cap\overline{V}) = 0$. Pravděpodobnost jevu S nyní spočítáme s pomocí věty o úplné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \mathrm{P}(S\cap D\cap V) + \mathrm{P}(S\cap\overline{D}\cap V) + \mathrm{P}(S\cap D\cap\overline{V}) + \mathrm{P}(S\cap\overline{D}\cap\overline{V})\\ &= \mathrm{P}(S\cap D\cap V) + \mathrm{P}(S\cap\overline{D}\cap\overline{V}) = \frac{3}{44} + \mathrm{P}(\overline{D}\cap\overline{V})\cdot\mathrm{P}(S|\overline{D}\cap\overline{V}).\end{aligned}$$

Protože D a V jsou nezávislé, jsou nezávislé i $\overline{D}$ a $\overline{V}$. Navíc ze zadání víme, že $\mathrm{P}(S|\overline{D}\cap\overline{V}) = \frac{1}{273}$, takže $\mathrm{P}(S) = \frac{3}{44} + (1-\frac{4}{11})\cdot(1-\frac{3}{16})\cdot\frac{1}{273} = \frac{3}{4\cdot 11}\cdot\frac{3\cdot 4}{3\cdot 4} + \frac{7}{11}\cdot\frac{13}{16}\cdot\frac{1}{3\cdot 7\cdot 13} = \frac{36+1}{3\cdot 11\cdot 16} = \frac{37}{3\cdot 11\cdot 16}$.



Dostáváme tak

$$\mathrm{P}(D\cap V|S) = \frac{\mathrm{P}(D\cap V\cap S)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{\frac{3}{44}}{\frac{37}{3\cdot 11\cdot 16}} = \frac{3\cdot 3\cdot 11\cdot 16}{4\cdot 11\cdot 37} = \frac{36}{37}.$$

Poznámky:
Všichni, kteří zvolili správný postup, nakonec i došli ke správnému výsledku. To je pozoruhodné; když jsme tuto úlohu počítali s Danilem, vyšlo nám nejprve několik různých výsledků, přičemž ne všechny výsledky byly čísly od nuly do jedné. Na druhou stranu, výsledek, na kterém jsme se nakonec shodli, se i ukázal být správný. *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 3.

Vašek má padesát kartiček s pokémony a padesát s digimony. Hraje s Honzou následující hru. Nejprve kartičky zamíchá tak, že všechna možná pořadí jsou stejně pravděpodobná. Potom Honzovi postupně kartičky ukazuje v pořadí, v jakém je zamíchal. Honza má v jednu chvíli Vaška zastavit a říct: „Příští kartička je digimon.“ Pokud bude mít pravdu, Vašek mu dá kartičku, a pokud ne, Vašek mu dá facku.

Honza se rozhodl pro následující strategii: Počká si na první okamžik, kdy počet digimonů, které mu Vašek ukázal, je aspoň o sedm menší než počet pokémonů, které mu Vašek ukázal, a v tu chvíli *si tipne, že příští kartička je digimon. Pokud tento jev nenastane do chvíle, kdy zbývá poslední kartička, Honza si o této kartičce tipne, že je to digimon. Dokažte, že pravděpodobnost, že touto strategií vyhraje digimona, je jedna polovina.*

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:
Kdyby Honza vždy volil poslední kartu z balíčku, tak by byla pravděpodobnost, že vyhraje digimona, rovna jedné polovině, neboť je počet pokémonů i digimonů v balíčku stejný.

Teď ukážeme, že si Honza použitím jakékoliv jiné *strategie* nemůže zvýšit svoji šanci na výhru, přičemž strategií myslíme nějakou množinu situací, v nichž si tipne, že následující karta je digimon. Pokud se v průběhu odhalování prvních 99 karet Honza nedostal do žádné z těchto situací, tak si tipne poslední kartu, takže vyhraje s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Předpokládejme tedy, že Honza chce tipnout následující kartičku, když v balíčku zbývá p pokémonů a d digimonů. Potom bude následující kartička digimon s pravděpodobností $\frac{d}{p+d}$. Ze symetrie však platí, že bude v dané situaci poslední kartička digimon rovněž s pravděpodobností $\frac{d}{p+d}$, takže má Honzova strategie i v tomto případě stejnou úspěšnost, jako volba poslední kartičky.

Ukázali jsme, že libovolná strategie (tedy i ta ze zadání, ve které Honza tipne následující kartičku, pokud platí $d - p = 7$) má padesátiprocentní šanci na úspěch.

POZNÁMKY:
Tato úloha se na první pohled může zdát neintuitivní, až lehce paradoxní – to, jaké byly předchozí kartičky, nám přece zdánlivě dává dost cenných informací o tom, jaké jsou ty zbývající, takže by měla existovat nějaká strategie, jež by měla nadpoloviční úspěšnost! Zádrhel je však v tom, že nám znalost podmíněné pravděpodobnosti toho, že bude v jistém stavu následující karta digimon, vlastně nedává žádný návod na to, kterou ze zbývajících karet vybrat.

Většina došlých řešení správně využila myšlenku symetrie, některým jedincům se úlohu podařilo dořešit i nějakým alternativním, mnohem pracnějším způsobem. Velká část nesprávných řešení se snažila výsledek nějakým způsobem odhadnout pomocí numerických výpočtů. Tento v praxi velmi užitečný přístup se však na důkazové úlohy nehodí. Je totiž něco úplně jiného, když víme, že výsledek je *přesně* jedna polovina, než když víme pouze to, že leží někde mezi 0,49 a 0,51.

(Danil Koževnikov)