Teorie grup II – Procitnutí symetrií

2. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Kolika způsoby můžeme nabarvit krychli, máme-li k dispozici padesát odstínů šedi? Stěnu natřeme vždy celou stejným odstínem a použité odstíny nemusejí být různé; dvě obarvení, která se liší pouze natočením v prostoru, považujeme za totožná.

(Jakub Löwit)

Řešení:
Chceme použít Burnsideovo lemma, a proto nejdříve určíme grupu otočení krychle. Podíváme se na jednu stěnu. Tu je možné otočit na jakoukoliv jinou stěnu, tudíž zde máme 6 možností. Dále můžeme libovolně cyklicky otáčet pořadí vrcholů na této stěně, což nám dává 4 možnosti. Rozmysleme si, že tímto je konfigurace krychle již pevně daná. Celkově má hledaná grupa 24 prvků.

Nyní prvky grupy vyjmenujeme a spočteme počet zafixovaných obarvených krychlí.

- Identita: zde jsou všechny krychle zafixovány, tudíž počet pevných bodů je 50^6.
- Otočení o 90° nebo 270° kolem stěnové osy: stěny provrtané osou zůstávají na místě a ostatní čtyři se cyklicky otočí na sebe, tudíž počet pevných bodů je 50^3. (Máme volnost v obarvení obou provrtaných stěn, zbylé čtyři musejí mít všechny stejnou barvu.) Máme tři páry protilehlých stěn, a proto počet takových otočení je 6.
- Otočení o 180° kolem stěnové osy: stěny provrtané osou zůstávají na místě a ostatní čtyři se dělí na dvě dvojice, které se prohodí, tudíž počet pevných bodů je 50^4. Máme tři páry protilehlých stěn, a proto počet těchto otočení je 3.
- Otočení o 120° nebo 240° kolem tělesové osy: stěny se dělí na dvě trojice, které se cyklicky otočí na sebe, tudíž počet pevných bodů je 50^2. Máme čtyři páry protilehlých vrcholů, proto existuje 8 takových otočení.
- Otočení o 180° kolem osy procházející středem krychle a středem dvou hran: stěny se dělí na tři dvojice, které se otočí na sebe, tudíž počet pevných bodů je 50^3. Máme 6 párů protilehlých hran, a proto je počet těchto otočení 6.

Celkově jsme probrali 24 otočení, takže jsme vyčerpali celou grupu. Nyní stačí dosadit číselné hodnoty do vzorce Burnsideova lemmatu a dostaneme počet orbit, neboli počet obarvení krychle:

$$\frac{1}{24}(50^6 + 6 \cdot 50^3 + 3 \cdot 50^4 + 8 \cdot 50^2 + 6 \cdot 50^3) = 651\,886\,250.$$

Poznámky:
Jedná se o typickou úlohu na Burnsideovo lemma, a proto si s ní řešitelé, kteří správně pochopili seriál, hravě poradili. Bohužel častá chyba byla, že někteří jen vypsali všech 24 otočení a dál už neukázali, že další otočení už neexistují. Je potřeba na to dávat pozor, protože v Burnsideově lemmatu se musí pracovat s celou grupou uvažovaných symetrií. Za tuto chybu jsem strhl jeden bod.

(Tonda Le)

Úloha 2.

Ukažte, že pokud existuje nějaká funkce $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{Z}_n$ vztahy

(i) $f(x) \neq x$,
(ii) $f(f(x)) = x$,
(iii) $f(f(f(x+1)+1)+1) = x$,

potom n dává zbytek dva po dělení čtyřmi.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Pokud $f(a) = f(b)$, pak $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$, tedy f je prostá. Dále je f na, protože pokud si pro libovolné x označíme $y = f(x)$, pak $f(y) = x$. Z toho plyne, že f je permutace.

Díky druhé podmínce umíme $\mathbb{Z}_n$ rozdělit na množiny tvaru $\{a, b\}$, kde $f(a) = b$ a $f(b) = a$. Díky první podmínce je každá taková množina dvoučlenná, proto je celkový počet prvků dělitelný dvěma, tedy $2 \mid n$.

Buď g permutace taková, že $g(x) = x + 1$ pro každé $x \in \mathbb{Z}_n$. Potom třetí podmínka říká, že permutace $h = f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g$ je identita.

Permutace g má jen jeden cyklus a ten je navíc sudé délky n, proto je $\operatorname{sign}(g) = -1$. Potom $\operatorname{sign}(h) = \operatorname{sign}(f)^3 \operatorname{sign}(g)^3 = -\operatorname{sign}(f)$. Protože h je identita (tedy se dá zapsat pomocí 0 transpozic), má znaménko 1. Tak dostáváme $\operatorname{sign}(f) = -1$. Protože f má $\frac{n}{2}$ cyklů délky 2, musí být $\frac{n}{2}$ liché. Z toho plyne $4 \nmid n$, což v kombinaci s $2 \mid n$ dává požadovaný výsledek.

Poznámky:

Všichni, kdo použili znaménko permutací, došli k řešení. Bez něj to bylo obtížnější a většině jiných řešení se nepovedlo dojít až do konce. *(Rado van Švarc)*

Úloha 3.

Nechť G je konečná grupa taková, že pro každou její vlastní podgrupu H (tj. $H \neq G$) existuje podgrupa K, která splňuje $H \leq K \leq G$ a má v G prvočíselný index. Označme jako p největší prvočíslo, které dělí $|G|$. Dále ať je P libovolná sylowovská p-podgrupa grupy G. Ukažte, že je P normální v G.

(Filip Bialas)

Řešení:

Označme k největší celé číslo takové, že p^k dělí řád G. Předpokládejme pro spor, že P není normální v G. Potom musí být normalizátor $N_G(P)$ vlastní podgrupou G, což znamená, že na něj můžeme volbou $H = N_G(P)$ aplikovat podmínku ze zadání a dostat podgrupu K, která obsahuje $N_G(P)$ a má prvočíselný index v G.

Jelikož K obsahuje $N_G(P)$ jako podgrupu, obsahuje jako podgrupu i P. Z Lagrangeovy věty tedy nutně $|P| = p^k$ dělí $|K|$. Pro konečné grupy platí $[G : K]|K| = |G|$, což znamená, že p nemůže dělit $[G : K]$. Tedy nutně $[G : K] = q$, kde q je prvočíslo menší než p.

Protože je P obsažena v K a $|K|$ je dělitelné stejně velkou mocninou p jako $|G|$, je P sylowovskou p-podgrupou i v K. Zřejmě $N_K(P) = K \cap N_G(P)$, ale protože $N_G(P) \leq K$, tak $N_K(P) = N_G(P)$. Index těchto normalizátorů v K, resp. v G, je roven počtu sylowovských p-podgrup v daných grupách, a ten dává vždy zbytek jedna po dělení p. Takže

$$[K : N_K(P)] = \frac{|K|}{|N_K(P)|} = \frac{|K|}{|N_G(P)|},$$

$$[G : N_G(P)] = \frac{|G|}{|N_G(P)|}$$

dávají zbytek jedna po dělení prvočíslem p. Nicméně platí

$$\frac{|G|}{|N_G(P)|} = \frac{|G|}{|K|}\frac{|K|}{|N_G(P)|} = [G : K][K : N_G(P)] = q[K : N_G(P)].$$

To ale není možné – pravá strana totiž dává zbytek q po dělení p (protože q je menší než p), zatímco levá strana dává zbytek jedna. Tím jsme dospěli ke kýženému sporu.

Poznámky:
Bez Sylowových vět odvozených v seriálu by tato úloha šla vyřešit opravdu těžko. Ve vzorovém řešení se použily snad všechny jejich výsledky. S jejich pomocí se ale několika řešitelům povedlo předvést kompletní důkaz. Všichni využili vlastnost grupy ze zadání pro H rovnou normalizátoru $N_G(P)$ a většina z nich postupovala dále jako ve vzorovém řešení. Trochu složitější, ale možná přirozenější postup zvolil *Matěj Doležálek*, který ukázal, že všechny sylowovské p-podgrupy grupy G musí ležet v K a z poslední rovnosti poté nemusel k odvození sporu vyšetřovat zbytky po dělení prvočíslem p. *(Filip Bialas)*