Algebra

3. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Želvičce Zuzce se o jejích 28. narozeninách vylíhlo z vajíčka první želvátko a další potomci se jí líhli postupně o každých dalších narozeninách – tedy druhé želvátko o 29. narozeninách, třetí o 30. narozeninách atd. Pomozte jí zjistit, zda (a případně kdy) bude mít na narozeninovém dortu stejně svíček jako všechna její želvátka dohromady.

(David Hruška)

Řešení:

Po jednom roce, tedy až Zuzce bude 29, se jí narodí druhé želvátko a první zestárne o rok. Součet věků želvátek tedy bude $0 + 1 = 1$. Za další rok se opět narodí další želvátko a ostatní zestárnou. Máme tedy 3 želvátka s věky postupně 0, 1 a 2 roky, což znamená, že na dortu budou mít celkem 3 svíčky.

Obecně po n letech od Zuzčiných 28. narozenin máme celkem $n+1$ želvátek s věky postupně 0, 1, …, n let. Součet jejich věků snadno spočítáme jako součet aritmetické posloupnosti[1] a dostaneme, že želvátka mají na dortech dohromady $\frac{n(n+1)}{2}$ svíček. V tu samou chvíli je Zuzce $28 + n$ let. Tyto dva výrazy dáme do rovnosti a výslednou rovnici řešíme v oboru přirozených čísel, protože narozeniny se konají pouze jednou ročně a Zuzka nemládne.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 28 + n$$

Rovnici upravíme do tvaru $n^2 - n - 56 = 0$.

Řešením této kvadratické rovnice jsou čísla $n = -7$, které ale není přirozené a není tedy odpovědí na otázku ze zadání, a $n = 8$. Za 8 let tedy bude mít Zuzka na dortu stejný počet svíček, jako všechna želvátka dohromady, a to 36.

Poznámky:

Úloha byla opravdu jednoduchá a téměř všechna došlá řešení byla správná. V některých řešeních chyběla zmínka o tom, že řešení $n = -7$ nevyhovuje zadání a toto řešení bylo prostě vynecháno. Body jsem za to nestrhával, ale pokud nějaké řešení nevyhovuje podmínkám zadání, tak by se to v řešení určitě mělo objevit. Taky se objevila řešení, která k výsledku došla postupným zkoušením čísel. To v tomto konkrétním případě fungovalo, protože výsledek byl poměrně malé číslo, ale pokud by byl větší, tak se k němu tímto způsobem už tak snadno nedostanete.

(Michal Töpfer)

[1] https://matematika.cz/posloupnosti#soucet-clenu-aritmeticke-posloupnosti

Úloha 2.

Marian našel dvě reálná čísla x, y, pro která platí následující vztahy:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 900,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 45.$$

Jaký je součin těchto čísel?

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si upravíme první rovnici tak, abychom na jedné straně dostali rozdíl dvou druhých mocnin. Ten pak rozložíme dle vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 &= 900 \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 &= 900 \\ \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) &= 900 \end{aligned}$$

Do závorek dosadíme druhou rovnici a vyjádříme xy:

$$\begin{aligned} 45\,(45 - 2xy) &= 900, \\ 45 - 2xy &= 20, \\ xy &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Součin čísel x a y tedy musí být roven $\frac{25}{2}$.

POZNÁMKY:

Velmi mile jste nás překvapili, neboť všechna došlá řešení byla správně. Většina řešení postupovala obdobně jako řešení vzorové. Pár z vás hledalo i konkrétní dvojice (x, y), které jsou řešeními zadané soustavy, což ale nebylo nutné, neboť jsme se ptali pouze na to, jaký musí být jejich součin.

(Tomáš Novotný)

Úloha 3.

Pro kladná reálná čísla x, y platí $xy \geq x + y$. Ukažte, že pak $x + y \geq 4$.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Při důkazu vyjdeme z platné nerovnosti, kterou dále upravujeme:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 4xy, \\ (x+y)^2 &\geq 4xy. \end{aligned}$$

Nyní použijeme předpoklad zadání $xy \geq x + y$, tedy $4xy \geq 4(x+y)$:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 \geq 4xy &\geq 4(x+y), \\ (x+y)^2 &\geq 4(x+y), \\ (x+y) &\geq 4. \end{aligned}$$

V předposledním řádku můžeme nerovnici bez problémů výrazem $(x+y)$ vydělit, protože ze zadání víme, že x, y jsou kladná čísla, tedy i jejich součet bude kladný a znaménko nerovnosti se tím nezmění. Takto jsme z počáteční platné nerovnosti a podmínky zadání odvodili požadovaný vztah $(x+y) \geq 4$.

Poznámky:
Postup vzorového řešení, který byl asi nejpřímější cestou k cíli, volilo relativně málo řešitelů. Většina buď používala AG nerovnost, nebo vyjádření jedné proměnné z podmínky zadání. Problematické někdy byly úpravy nerovnic, u kterých by při násobení a dělení nějakým výrazem mělo být zdůrazněno, že výraz je nezáporný a nemění tak znaménko nerovnosti. U chybných řešení bylo časté tvrzení, že aby byla splněna podmínka zadání, x i y musí být větší než 2, což není pravda.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 4.

Kuba má kladná reálná čísla a, b, c. V závislosti na nich by chtěl najít všechna reálná řešení x rovnice

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{bx+c}+\sqrt{cx+a}=\sqrt{a-bx}+\sqrt{b-cx}+\sqrt{c-ax}.$$

Ukojte jeho zvědavost.

(Kuba Löwit)

Řešení:
Předně si uvědomme, že $x = 0$ je určitě řešením rovnice pro libovolná kladná a, b, c. Vskutku, jistě platí, že $\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Nyní se na rovnici podívejme z dálky a povšimněme si, že na levé straně máme funkci rostoucí v x na celém svém definičním oboru. To proto, že funkce $\sqrt{x}$ a $ax + b$ jsou rostoucí, dále složení dvou rostoucích funkcí je rostoucí funkce a součet rostoucích funkcí je zase rostoucí. Obdobně pravá strana rovnice je klesající v x na celém svém definičním oboru, protože funkce $a - bx$ je klesající, a tedy i $\sqrt{a-bx}$ je klesající kvůli tomu, že složením rostoucí a klesající funkce dostaneme klesající funkci. Konečně součet klesajících funkcí je opět klesající.

Teď už jsme skoro hotovi. Libovolná rovnice $f(x) = g(x)$ pro rostoucí f a klesající g totiž může mít nejvýše jedno řešení. Pokud jsme už totiž nalezli x takové, že $f(x) = g(x)$ a teď uvážíme nějaké $y > x$, máme $f(y) > f(x)$, ale $g(y) < g(x)$, tedy $f(y) > g(y)$. Žádné $y > x$ tedy již není řešením rovnice a z obdobné úvahy plyne, že ani žádné $y < x$ nemůže být řešením. Nalezené řešení $x = 0$ je tedy nutně jediným řešením rovnice.

Poznámky:
Někteří z vás si úlohu mírně zkomplikovali tím, že rovnici řešili v oboru komplexních čísel, neboli uvažovali i případ, kdy je pod nějakou odmocninou záporný výraz. S odmocninami v oboru komplexních čísel musí být člověk vždy opatrný – zatímco v reálných číslech odmocninou z a myslíme kladné řešení rovnice $x^2 = a$, v komplexním světě často nemusí být jasné, které ze dvou možných řešení této rovnice si vybrat. Pokud jednoduše pro každé kladné a dosadíme za $\sqrt{-a}$ výraz $i \cdot \sqrt{a}$, není těžké si rozmyslet, že i v tomto případě má rovnice stále jediné řešení.

(Vašek Rozhoň)

Úloha 5.

Na rovném telegrafním drátu sedí n holubů a n holubic. Dokažte, že součet všech vzdáleností mezi ptáky různého pohlaví je větší nebo roven součtu všech vzdáleností mezi ptáky stejného pohlaví.[2]

(Kuba Löwit)

Řešení:
Vzdialenosť medzi ľubovolnými dvoma vtákmi sa dá zapísať ako súčet vzdialeností medzi niektorými susediacimi vtákmi. Preto nám stačí ukázať, že každý úsek susediacich vtákov sa započíta do súčtu vzdialeností rôzneho pohlavia viackrát ako do súčtu vzdialeností rovnakých pohlaví. Zvoľme si teda nejaký úsek medzi dvoma susediacimi vtákmi. Počet holubíc naľavo od neho (vrátane ľavého konca

[2] Vzdálenost dvou konkrétních opeřenců započítáváme právě jednou.

úseku, ak je to treba) označíme X. Potom počet holubíc napravo od úseku (vrátane pravého konca úseku, ak je to treba) bude $n - X$. Podobne označíme počet holubov naľavo od daného úseku Y a potom počet holubov napravo od úseku je $n - Y$. Daný úsek sa započíta do vzdialenosti dvoch vtákov práve vtedy, ak sú na rôznej strane od úseku. Teda do súčtu vzdialeností vtákov rôzneho pohlavia sa úsek započíta $X(n-Y)+Y(n-X)$ a do súčtu vzdialeností vtákov rovnakého pohlavia sa započíta $X(n-X)+Y(n-Y)$.

Ďalej vieme, že platí

$$\begin{aligned}(X-Y)^2 &\geq 0,\\ -2XY &\geq -X^2-Y^2,\\ Xn-XY+Yn-XY &\geq Xn-X^2+Yn-Y^2,\\ X(n-Y)+Y(n-X) &\geq X(n-X)+Y(n-Y).\end{aligned}$$

A teda naozaj je daný úsek započítaný viackrát do súčtu vzdialeností medzi vtákmi rôzneho pohlavia ako do súčtu vzdialeností medzi vtákmi rovnakého pohlavia.

Poznámky:

Väčšina riešiteľov postupovala rovnako ako vzorové riešenie alebo indukciou. Našli sa aj takí, ktorí do istej miery rozoberali možnosti. Táto cesta ale prináša veľa úskalí, pretože tvrdenie je treba ukázať pre ľubovolné n a ľubovolné rozloženie holubov na drôte, takže rozobratie všetkých možností jednu po jednej je nemožné. Na druhej strane ak rozoberiete nejaké možnosti, je treba dobre dokázať, prečo ostatné môžeme vynechať. A to býva spravidla rovnako obtiažne ako sama úloha.

(Marta Kossaczká)

Úloha 6.

Madam Verča si do řady napsala celá čísla, která tvoří nekonečnou nekonstantní aritmetickou posloupnost[3]. Mezi některá z nich pak Lucien napsal středníky. Následně vytvořil novou nekonečnou posloupnost, přičemž první člen získal sečtením čísel od začátku aritmetické posloupnosti po první středník, druhý člen sečtením čísel mezi prvním a druhým středníkem a tak dále. Může tato nově vzniklá posloupnost být geometrická[4]?

(Rado van Švarc)

Řešení:

Ano, může. Verča si mohla napsat například aritmetickou posloupnost 1, 2, 3, … Potom Lucienovi stačí napsat středník za každé (zjevně celé) číslo tvaru $\frac{3^k-1}{2}$, kde k je kladné celé číslo. Potom totiž bude součet čísel před k-tým středníkem roven

$$1+2+\cdots+\frac{3^k-1}{2} = \frac{\left(\frac{3^k-1}{2}\right)\left(\frac{3^k+1}{2}\right)}{2} = \frac{9^k-1}{8},$$

a tedy součet čísel mezi k-tým a $(k+1)$-ním středníkem je

$$\frac{9^{k+1}-1}{8} - \frac{9^k-1}{8} = \frac{(9\cdot 9^k-1)-(9^k-1)}{8} = 9^k.$$

Protože zároveň součet čísel před prvním středníkem je $\frac{9^1-1}{8} = 1 = 9^0$, je takto vzniklá posloupnost geometrická s výchozím členem 1 a keoficientem 9.

---

[3] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost, pokud existuje d takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Posloupnost je nekonstantní, pokud $d \neq 0$.

[4] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří geometrickou posloupnost, pokud existuje q takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = q \cdot a_n$.

Poznámky:
Řešení se bohužel sešla pouze tři, a jen dvě z nich byla správně. Vzorové řešení sice vypadá lehce, ale vlastně je dosti trikové. Vymyslet se dá zkoumáním vzorců pro součty aritmetických řad.

(Rado van Švarc)

Úloha 7.

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna **iracionální čísla** x, y *vztah*

$$f(xy) = f(x+y).$$

(Kuba Löwit)

Řešení:
Nechť t je v celém důkazu kladné iracionální číslo.

Číslo $\sqrt{t}$ je rovněž kladné a iracionální. Toto tvrzení snadno nahlédneme sporem. Pokud by $\sqrt{t} \in \mathbb{Q}$, potom $\sqrt{t} = \frac{k}{l}$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$, a tedy $t = \frac{k^2}{l^2} \in \mathbb{Q}$.

Dosazením $\left(x = -\sqrt{t}, y = \sqrt{t}\right)$ do funkcionální rovnice dostaneme, že

$$f\left(-t\right) = f\left(-\sqrt{t}\sqrt{t}\right) = f\left(xy\right) = f\left(x+y\right) = f\left(-\sqrt{t}+\sqrt{t}\right) = f\left(0\right).$$

Každá vyhovující funkce f tedy splňuje, že pro všechna záporná iracionální čísla je funkční hodnota rovna $f\left(0\right)$.

Volbou $\left(x = -\sqrt{t}, y = -\sqrt{t}\right)$ získáme, že

$$f\left(t\right) = f\left(\left(-\sqrt{t}\right)\cdot\left(-\sqrt{t}\right)\right) = f\left(xy\right) = f\left(x+y\right) = f\left(-\sqrt{t}-\sqrt{t}\right) = f\left(-2\sqrt{t}\right).$$

Číslo $-2\sqrt{t}$ je zřejmě záporné a iracionální, a tak z první odvozené rovnosti víme, že

$$f\left(t\right) = f\left(-2\sqrt{t}\right) = f\left(0\right).$$

Každá vyhovující funkce f tedy nabývá na všech iracionálních číslech hodnoty $f\left(0\right)$.

Nechť $q \in \mathbb{Q}$, potom můžeme dosadit $\left(x = q - \sqrt{2}, y = \sqrt{2}\right)$.

$$f\left(q\right) = f\left(q - \sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = f\left(x+y\right) = f\left(xy\right) = f\left(\left(q-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right) = f\left(q\sqrt{2}-2\right).$$

Číslo $q\sqrt{2}$ je iracionální, takže je iracionální i číslo $q\sqrt{2}-2$. Tudíž platí, že

$$f\left(q\right) = f\left(q\sqrt{2}-2\right) = f\left(0\right).$$

Každá vyhovující funkce f musí pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňovat, že $f\left(x\right) = f\left(0\right)$. Musí se tedy jednat o konstantní funkci. Každá konstantní funkce pak rovnici vyhovuje. Řešením jsou tedy právě funkce $f\left(x\right) = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Poznámky:
Většina řešení byla podobná vzorovému. Několik lidí použilo substituci $\left(x = q - \pi, y = \pi\right)$ pro $q \in \mathbb{Q}$. Pak ale bylo složitější vysvětlit, proč je výraz $xy = q\pi - \pi^2$ iracionální číslo. *(Martin Hora)*

Úloha 8.

Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla a, b a c. Dále víme, že polynomy

$$ax^3 + bx + c,$$
$$bx^3 + cx + a,$$
$$cx^3 + ax + b$$

mají společný kořen. Dokažte, že alespoň jeden z těchto polynomů má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.

(Rado van Švarc, Kuba Löwit, David Hruška)

Řešení:

Označme polynomy ze zadání postupně jako p, q, a r a jejich společný kořen jako k. Povšimněme si, že $p(1) = q(1) = r(1) = a + b + c$ a $p(k) = q(k) = r(k) = 0$.

Nyní budeme chtít říct, že je jenom jeden bod, pro který mají všechny tři polynomy stejnou hodnotu. To uděláme tak, že vezmeme jejich rozdíly (které jsou pro každý takový bod nulové) a vhodně je nakombinujeme tak, aby nám zmizel nejvyšší člen, čímž (díky tomu, že nemáme žádné kvadratické členy) zbude pouze lineární polynom, který už nemůže mít dvě různé nuly. Zkusme toto udělat pořádně:

Nechť $s(x) = (b - c)(p(x) - q(x)) - (a - b)(q(x) - r(x))$. Tento polynom je nanejvýše lineární (všechny členy vyššího stupně zmizí, protože koeficient u x^3 je $(b - c)(a - b) - (a - b)(b - c) = 0$). Protože p, q, a r mají v 1 i v k všechny stejnou hodnotu (v 1 mají všechny hodnotu $a + b + c$ a v k mají všechny hodnotu 0), může být $k \neq 1$ jen, když je s konstantně nulový. Ukážeme, že konstantně nulový není.

Kdyby byl, tak je $s(0) = 0$. Jinými slovy pokud si označíme $\alpha = b - c$ a $\beta = c - a$, pak platí $0 = s(0) = \alpha\beta - (\alpha + \beta)^2 = -(\alpha + \frac{\beta}{2})^2 - 3\left(\frac{\beta}{4}\right)^2$, což může nastat pouze tehdy, když $\alpha = \beta = 0$, neboli $a = b = c$, což ze zadání neplatí. Proto s není konstantně nulový polynom, a tedy $k = 1$, a proto i $a + b + c = p(1) = 0$.

Protože a, b i c jsou nenulová, musí nějaká dvě z nich mít stejné znaménko. Z cykličnosti nechť jsou to BÚNO a a b. Protože 1 je kořenem $q(x)$, dá se z q vytknout $(x-1)$ – z podmínky $a+b+c = 0$ plyne $q(x) = bx^3+cx+a = bx^3-(a+b)x+a = (x-1)(bx^2+bx-a)$. Ovšem diskriminant bx^2+bx-a je $b^2 + 4ab > 0$ (protože a a b mají stejné znaménko), tedy tento kvadratický polynom jde rozdělit na dva lineární polynomy s reálnými koeficienty. Proto lze q rozložit na tři lineární polynomy s reálnými koeficienty, a tedy má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.

Poznámky:

Úloha zaručeně patřila mezi jednodušší osmičky – kdo dost dlouho upravoval rovnice a dával pozor na nerovnosti, nakonec se k řešení dopracoval.

(Rado van Švarc)