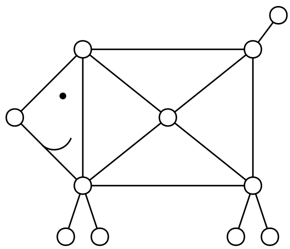
Dělitelnost

3. podzimní série | Vzorové řešení

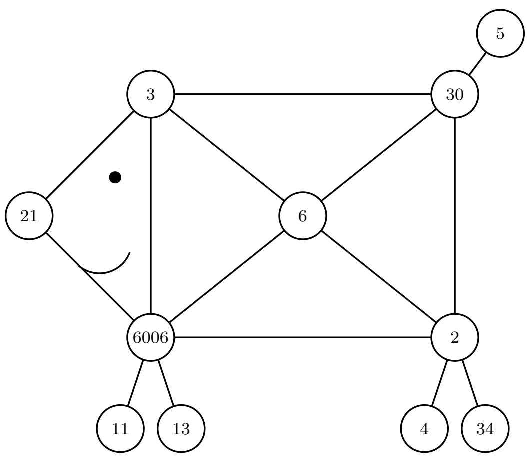
Úloha 1.

Do každého kolečka napište jedno z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 21, 30, 34 a 6006 *tak, aby poměr čísel ve dvou kolečkách byl celočíselný právě tehdy, když jsou tato kolečka spojená čárou.*



(Anička Doležalová)

Řešení:
Zadání vyhovuje například následující rozmístění čísel:



Poznámky:
Všichni řešitelé si s úlohou hravě poradili a PraSátko vyplnili. Většina řešení obsahovala i krátký komentář, v jakém pořadí je vhodné čísla do koleček doplňovat. Porovnáním počtu čar vycházejících z koleček a počtu dělitelů (násobků) čísel vyšlo, že na čumáčku PraSátka musí nutně být číslo 21, na bradičce 6006 a na bříšku 2. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 2.

Martin si napsal své oblíbené číslo do sešitu. Petr mu ho vzal a škrtl cifru na místě jednotek. Pak si všiml, že původní číslo je dělitelné tím novým. Najděte všechna aspoň dvouciferná čísla, která mohl Martin napsat.

(David Hruška)

Řešení:
Martinovo oblíbené číslo si označíme a. Můžeme jej napsat jako $10b + c$, kde b je nové číslo a c je škrtnutá cifra. Hledáme tedy taková čísla, že $b \mid 10b + c$, což nastane právě tehdy, když $b \mid c$.

Pokud a je dvouciferné, pak vyhovují právě ta čísla, pro která dělí cifra na místě desítek cifru na místě jednotek.

V opačném případě, tedy pokud $a \geq 100$, platí $b \geq 10$. Z toho plyne, že b je větší než c, protože c je cifra. Ale zároveň má platit, že b dělí c. Tyto dvě podmínky jsou zároveň splněny právě tehdy, když $c = 0$.

Množinou řešení jsou čísla 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 33, 36, 39, 40, 44, 48, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99 a všechna alespoň trojciferná čísla končící na 0.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a podobná vzorovému. Několik řešitelů našlo jen taková dvouciferná čísla (pravděpodobně přehlídli slovo aspoň v zadání úlohy). Jelikož se jednalo o snadnější část řešení, uděloval jsem jen 1 bod. *(Lucien Šíma)*

Úloha 3.

Žabička Danýlek skáče po očíslovaných kamenech. Vždy, když stojí na kameni s číslem n, najde největšího a nejmenšího prvočíselného dělitele čísla n. Pak skočí na kámen označený součtem těchto dělitelů. Ukažte, že ať začne kdekoli, může takto navštívit jen konečně mnoho různých kamenů.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Pro spor předpokládejme opak. Vezměme nejmenší n takové, že když žabička Danýlek začíná na kameni s číslem n, pak navštíví nekonečně mnoho kamenů. Všimněme si, že z toho plyne, že žabička nikdy nesmí skočit na kámen s číslem menším než n, jinak potom už navštíví jen konečně mnoho kamenů. Jednoduše ověříme, že $n \geq 8$: z dvojky skočí na čtyřku, čtyřka se zacyklí sama na sobě, z trojky skočí na šestku a ta se (stejně jako čísla 5 a 7) objeví v cyklu $6 \to 5 \to 10 \to 7 \to 14 \to 9 \to 6 \to \dots$

Nejprve nechť n je složené. Pak má alespoň dva prvočíselné dělitele, nejmenšího označíme k a největšího ℓ. Protože jsou oba vlastní, tak víme, že $k, \ell \leq \frac{n}{2}$, a tedy $k + \ell \leq n$. To ale znamená, že žabička buď po prvním skoku zůstane na n (a tudíž nikdy neskočí nikam jinam, což je spor), nebo skočí na číslo menší než n, což je také spor.

Tedy n musí být prvočíslo. Takže největší i nejmenší prvočíselný dělitel n je n. Žabička Danýlek proto dále skočí na kámen s číslem $2n$, a protože 2 a n jsou jediní prvočíselní dělitelé $2n$, skočí poté na kámen s číslem $n + 2$.

Nejprve předpokládejme, že $n + 2$ je složené. Pak může žabička Danýlek skočit na číslo menší než n, na n, na $n + 1$ nebo $n + 2$. První případ jsme již vyloučili v úvodu. Podívejme se na ty ostatní:

n: Danýlek by skákal cyklicky mezi n, $2n$ a $n + 2$,

$n+1$: Číslo $n+1$ je sudé, a tedy složené, takže Danýlek buď zůstane na $n+1$, nebo skočí na n a bude cyklicky skákat na n, $2n$, $n+2$, $n+1$, n, a nebo skočí na nižší číslo než n,

$n+2$: Danýlek už bude skákat pouze na $n+2$.

Ve všech případech jsme dostali spor, takže $n+2$ nemůže být složené.

Tedy $n+2$ musí být prvočíslo. Stejným postupem jako pro n dostaneme, že po dvou skocích bude žabička na $n+4$. Protože n, $n+2$ a $n+4$ jsou tři za sebou jdoucí lichá čísla, je právě jedno z nich dělitelné třemi. Navíc n i $n+2$ jsou prvočísla větší než 3, proto musí být $n+4$ dělitelné třemi. Žabička Danýlek tak poté skočí maximálně na číslo $3+\frac{n+4}{3}$. Ale ze vztahu $n \geq 8$ dostaneme

$$\begin{aligned} n &\geq 8, \\ 2n &\geq 16, \\ 3n &\geq 16+n > 9+(n+4), \\ n &> 3+\frac{n+4}{3}. \end{aligned}$$

To ale znamená, že z $n+4$ Danýlek skočí na kámen s číslem menším než n, což je spor.

Poznámky:

Všechna řešení, co dorazila, byla na rozdíl od vzorového řešena přímo. Jeden bod jsem udělila za dokázaní, že žabička Danýlek ze složeného čísla skočí na nižší číslo. Druhý bod jsem udělila, když si řešitel správně rozmyslel, jak bude žabička skákat poté, co skočí na prvočíslo, a poslední, pokud i správně zdůvodnil, proč z toho vyplývá, že žabička opravdu skočí pouze na konečně mnoho kamenů.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 4.

Najděte všechna prvočísla, která nelze zapsat jako $\sqrt{24n+1}$ pro žádné přirozené n.

(David Hruška)

Řešení:

Chceme, aby pro dané prvočíslo p existovalo n takové, aby platilo $p=\sqrt{24n+1}$. Výraz můžeme ekvivalentně upravovat:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{24n+1}, \\ p^2 &= 24n+1, \\ (p+1)(p-1) &= 24n. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že p se dá zapsat jako $\sqrt{24n+1}$ právě tehdy, když $24 \mid (p+1)(p-1)$.

Je zjevné, že $24 \nmid 3=(2+1)(2-1)$ a $24 \nmid 8=(3+1)(3-1)$, takže prvočísla 2 ani 3 takto zapsat nelze. Dokážeme, že zbylá prvočísla již takto zapsat umíme.

Podívejme se na tři po sobě jdoucí čísla $p-1$, p, $p+1$. Jedno z těchto čísel je určitě dělitelné třemi. Avšak žádné prvočíslo větší než 3 není dělitelné třemi, a proto je dělitelné třemi jedno z čísel $p-1$, $p+1$. Tedy 3 dělí $(p-1)(p+1)$.

Obdobně p není sudé, protože prvočísla větší než dva jsou vždy lichá. Proto jsou sudá obě čísla $p-1$ a $p+1$, a jelikož jde o dvě po sobě jdoucí sudá čísla, je jedno z nich dělitelné dokonce čtyřmi. Proto platí $2\cdot 4=8 \mid (p+1)(p-1)$.

Jelikož jsou čísla 8 a 3 nesoudělná, tak i $3\cdot 8=24 \mid (p+1)(p-1)$, což jsme chtěli dokázat, a tudíž každé prvočíslo větší než tři lze takto zapsat.

Poznámky:

Většina řešení byla správná, avšak někteří si spletli rozklad na prvočinitele a tvrdili, že $24=2\cdot 2\cdot 3$ a někteří jen tipli výsledek, ale neuvedli důkaz, že to pro ostatní prvočísla jde, za což jsem dával nula bodů.

(Filip Čermák)

Úloha 5.

Číslo n nazveme vypečené, jestliže ho můžeme vyjádřit jako součet tří čísel a, b, c, pro která platí

$$a < b < c, \qquad a \mid b, \qquad b \mid c.$$

Dokažte, že existuje pouze konečně mnoho čísel, která nejsou vypečená.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Důkaz začneme pozorováním. Je-li přirozené číslo d vypečené, pak jeho libovolný násobek md můžeme napsat jako $ma + mb + mc$, což prokazuje vypečenost md.

Každé liché číslo $l > 5$ je vypečené. Stačí zvolit $a = 1$, $b = 2$, $c = l - 3$. Zřejmě l je součtem těchto čísel a $l - 3$ je sudé číslo větší než 2, z čehož plyne vypečenost l. Dále číslo 16 je vypečené, neboť je součtem 1, 5 a 10.

Každé přirozené číslo n umíme jednoznačně napsat ve tvaru $n = 2^k \cdot l$, kde k je celé nezáporné a l je liché číslo. Pokud $l > 5$, pak je n dělitelné vypečeným lichým číslem. Pokud $k \geq 4$, pak je n dělitelné vypečeným číslem 16. Podle úvodního pozorování dělitelnost vypečeným číslem prokazuje vypečenost a zbývá jen konečný počet čísel, která nemusí být vypečená (čísla tvaru $2^k \cdot l$, kde k je menší než 4 a l liché menší než 7).

Poznámky:

Velká část došlých řešení byla správná, někteří řešitelé si však přidělali práci rozebíráním většího množství případů, než bylo nutné. Častou chybou bylo, že řešitelé předpokládali, že každé sudé číslo je po vydělení dvěma liché, a snažili se tak ukázat jeho vypečenost přes dělitelnost lichým číslem větším než pět. Bohužel jim tím unikla nekonečná podmnožina přirozených čísel (mocniny dvojky, případně čísla dělitelná čtyřmi). Za tato částečná řešení jsem uděloval 2–3 body. *(Lucien Šíma)*

Úloha 6.

Anička chce číslo n s následující vlastností: pro všechny nenulové cifry a a b platí, že když před n přidáme a a za n připíšeme b, bude výsledné číslo dělitelné číslem $\overline{ab}$. Může Anička takové číslo najít?

(Rado van Švarc)

Řešení:

Předpokládejme, že takové n existuje. Potom speciálně dostáváme $12 \mid \overline{1n2}$ a $24 \mid \overline{2n4}$. Protože 12 i 24 jsou obě dělitelné čtyřmi, máme $4 \mid \overline{1n2}$ a $4 \mid \overline{2n4}$. Odečtením pak získáme $4 \mid 100\ldots02$, přičemž nul je stejný počet jako má n cifer. To ale nemůže platit, protože poslední dvojčíslí není dělitelné čtyřmi.

Takže žádné takové n nemůže existovat.

Poznámky:

Klíčové pozorování bylo, že chceme sledovat jen poslední cifry. Nejčastější (a asi nejrychlejší) způsob jak to udělat, byl použitím 12 a 24 jako ve vzoráku. Některá řešení pracovala podobným způsobem také s nějakými z čísel 16, 25, 44 a 88. *(Rado van Švarc)*

Úloha 7.

Najděte všechny monické polynomy[1] f s celočíselnými koeficienty takové, že platí

$$p \mid 2 \cdot \big(f(p)!\big) + 1$$

pro nekonečně mnoho prvočísel p, pro která je $f(p) > 0$.

(Rado van Švarc)

[1] Polynom $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ nazveme monickým, pokud $a_n = 1$.

Řešení:

Předpokládejme, že polynom f splňuje podmínku v zadání.

Pokud pro nějaké prvočíslo p platí $f(p) \geq p$, potom máme $p \mid f(p)!$, a tedy $p \nmid 2 \cdot (f(p)!) + 1$. Pro nekonečně mnoho prvočísel musí tedy nastat nerovnost $f(p) < p$. Pokud by však f byl monický polynom stupně alespoň 2, pak pro všechna dostatečně velká x by platilo $f(x) \geq x$. Pokud $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $n \geq 2$, označme si $a = \min\{0, a_0, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ a ukážeme, že pro všechna $x \geq 1 - na$ je $f(x) \geq x$. Protože $a \leq 0$, je $x \geq 1$, takže díky $a_i \geq a$ pro $i \neq 1$ a $a_1 \geq a + 1$, máme $a_i x^i \geq a x^i$ pro $i \neq 1$ a $a_1 x \geq ax + x$. Zároveň protože $a \leq 0$ a $x \geq 1$, platí $ax^i \geq ax^{n-1}$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Z toho dostáváme:

$$f(x) \geq x^n + ax^{n-1} + \cdots + ax + a + x \geq x^n + nax^{n-1} + x = x^{n-1}(x + na) + x \geq x.$$

Nerovnost $f(p) < p$ by tak nastala jen pro konečně mnoho prvočísel, což je spor. Takže f může mít stupeň roven nanejvýš jedné.

Dále, polynom stupně 0 (konstantní polynom) podmínku triviálně nesplňuje, proto je f polynom stupně 1. Tedy $f(x) = x + m$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Kvůli podmínce $f(p) < p$ máme $f(x) = x - k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Nyní dokážeme, že jediná možná hodnota k je 3. Vezměme si nějaké p, pro které platí podmínka ze zadání. Wilsonova věta nám říká, že $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Z podmínky ze zadání víme

$$(p-1)! \equiv -1 \equiv 2 \cdot (p-k)! \pmod{p}.$$

Dále

$$(p-1)! = (p-k)! \cdot (p-(k-1)) \cdot (p-(k-2)) \cdots (p-1) \equiv (p-k)!(-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}.$$

Tedy pokud předchozí kongruenci vydělíme $(p-k)!$ (což můžeme, protože $(p-k)!$ je nesoudělné s p), dostaneme

$$(-1)^{k-1}(k-1)! \equiv 2 \pmod{p},$$

neboli $p|(k-1)! + (-1)^k \cdot 2$. Jelikož takových p existuje nekonečně mnoho a číslo $(k-1)! + (-1)^k \cdot 2$ nezávisí na p, musí být $(k-1)! + (-1)^k \cdot 2 = 0$, proto $(k-1)! = 2$ a tudíž $k = 3$. Pokud nyní ověříme hodnotu pro $k = 3$, dostáváme $(3-1)! + (-1)^3 \cdot 2 = 0$, tedy polynom $f(x) = x - 3$ podmínku v zadání splňuje.

Hledaný polynom je proto jediný, a to $f(x) = x - 3$.

Poznámky:

Řešení mělo v podstatě dvě části – zaprvé, uvědomit si, že polynomy stupně ≥ 2 rostou moc rychle, zadruhé, použít Wilsonovu větu pro úpravu kongruence. Všichni řešitelé, kteří dospěli k úspěšnému závěru, se drželi tohoto schématu.

V první části někteří používali argument s limitami. To je právě ten způsob, jak se na to člověk, který limity zná, typicky dívá. Znalost limit ale v PraSeti nepředpokládáme, a proto ve vzorovém řešení je uvedeno zcela korektní zdůvodnění nerovnosti bez použití limit. *(Tonda Češík)*

Úloha 8.

Rozhodněte, zda existuje číslo a takové, aby pro nekonečně mnoho čísel n platilo:

$$n! + a \mid (2n)!$$

(Rado van Švarc)

Řešení:

Pro spor předpokládejme, že takové a existuje. Pak existuje $n \geq 2a + 12$ takové, že

$$n! + a \mid (2n)!.$$

Protože $n \geq a$, tak můžeme zapsat $n! + a$ jako $a \cdot (\frac{n!}{a} + 1)$, kde jsou oba činitelé přirození. Zřejmě $\frac{n!}{a} = 1 \cdot 2 \cdots (a-1) \cdot (a+1) \cdots n$ je dělitelné každým číslem menším nebo rovným n kromě možná a, ale díky $n \geq 2a$ máme $(a \cdot 2a) \mid n!$, takže $a \mid \frac{n!}{a}$. To znamená, že $\frac{n!}{a}$ je dělitelné všemi přirozenými čísly menšími nebo rovnými n, a proto $\frac{n!}{a} + 1$ není dělitelné žádným přirozeným číslem menším nebo rovným n.

Zároveň pokud nějaké prvočíslo p dělí $\frac{n!}{a} + 1$, tak určitě dělí i $(2n)!$, tedy $p \leq 2n$, takže $\frac{n!}{a} + 1$ je součin některých prvočísel mezi n a $2n$ a každé je v tomto součinu v ne vyšší než první mocnině. Pokud tedy $n\#$ označíme *primoriál* čísla n (součin všech prvočísel menších nebo rovných n), tak platí

$$\frac{n!}{a} + 1 \mid \frac{2n\#}{n\#}.$$

Nyní ale ukážeme, že $\frac{n!}{a} + 1 > \frac{2n\#}{n\#}$, čímž dostaneme spor, protože pak výše získaná dělitelnost nebude moct platit.

K tomu nám pomůžou dvě nerovnosti:

První z nich je nerovnost $\frac{n!}{a} > 4^n$ pro jakékoliv $n \geq a$ a $n \geq 12$. Zřejmě platí $\frac{n!}{a} \geq (n-1)!$. Takže stačí ukázat, že $(n-1)! > 4^n$. To dokážeme pro $n \geq 12$ jednoduchou indukcí. Pro $n = 12$ máme $39\,916\,800 = (12-1)! > 4^{12} = 16\,777\,216$. A pokud tvrzení platí pro nějaké $k \geq 12$, pak $((k+1)-1)! = k(k-1)! \geq k \cdot 4^k > 4^{k+1}$, takže platí i pro $k+1$, čímž je indukční krok dokončen.

A druhá pak říká, že $\frac{2n\#}{n\#} \leq 4^n$ pro všechna přirozená n. Všimněme si, že

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

je určitě násobkem všech prvočísel p, pro která $n < p < 2n$, a zároveň také $\binom{2n}{n} \leq \Sigma_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n} = 4^n$. Takže

$$\frac{2n\#}{n\#} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Nyní, protože jsme zvolili $n > 2a + 12$, už jednoznačně platí

$$\frac{n!}{a} + 1 > \frac{n!}{a} > 4^n \geq \frac{2n\#}{n\#}.$$

což je požadovaný spor.

Poznámky:

V důkazu jsme použili $n > 2a + 12$, což se ze začátku může zdát jako náhodná konstanta. Důvodem je ale jen, abychom měli dostatečně velké číslo n – větší než $2a$, abychom dostali požadovanou dělitelnost, a větší než $a + 12$, aby určitě platila první nerovnost.

Úloha byla velmi těžká na vymyšlení, což se projevilo v malém počtu odeslaných řešení, a navíc se do nerovností dalo velmi snadno zamotat, a tak jen tři z nich úspěšně došly až k výsledku. Dva další řešitelé se pokusili využít myšlenku se součinem prvočísel od n do $2n$, ale už nedotáhli potřebnou nerovnost, za což jsem udělil 2 body. *(Jáchym Solecký)*