Rovnostranné trojúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. PROSINCE 2017

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Je dán rovnostranný trojúhelník. Dokreslete do obrázku dvě přímky tak, aby se v něm pak nacházely čtyři rovnostranné trojúhelníky (mohou se překrývat).

ÚLOHA 2. (3 BODY)

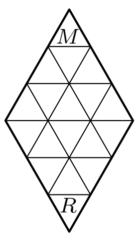
Je dán čtverec $ABCD$. V něm je vyznačený bod P takový, že je trojúhelník ABP rovnostranný. Mimo čtverec zvolme bod Q tak, aby byl trojúhelník ADQ rovnostranný. Dokažte, že body Q, P a C leží na jedné přímce.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

V rovině leží pět shodných rovnostranných trojúhelníků, které mohou být různě natočené. Dokažte, že pro každý z nich lze zbylé trojúhelníky bez otáčení posunout tak, aby ho celý zakrývaly. Trojúhelníky se mohou překrývat.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n-krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo buď jako první stoupne na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii[1].

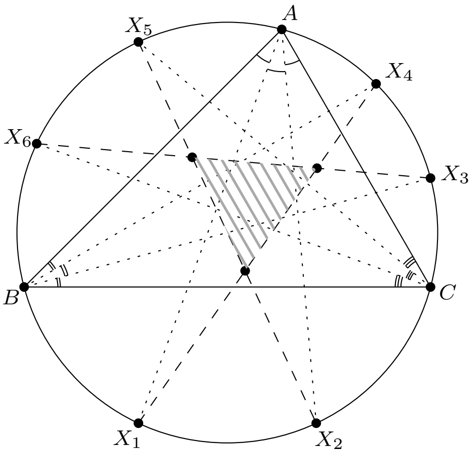


Situace na začátku hry pro $n = 3$

[1] Hráč má vyhrávající strategii, pokud umí vyhrát nezávisle na tom, jak táhne jeho protivník.

Úloha 5. (5 bodů)

Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC. Přímky procházející vrcholem A, které dělí úhel $\sphericalangle BAC$ na třetiny, protínají kružnici k podruhé v bodech X_1 a X_2. Body X_3 až X_6 jsou definované podobně pomocí vrcholů B a C. Navíc body $X_1, X_2, \ldots, X_6$ leží na k v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že přímky X_1X_4, X_2X_5 a X_3X_6 určují rovnostranný trojúhelník.



Úloha 6. (5 bodů)

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P. Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímek AP, BP, CP se stranami trojúhelníku ABC. Ukažte, že $|PX| + |PY| + |PZ| < |AB|$.

Úloha 7. (5 bodů)

V sešitě je nakreslený trojúhelník ABC, pro který platí, že úhel při vrcholu A je dvojnásobkem úhlu při vrcholu B. Anička v něm vyznačila bod P a pak si všimla, že vzdálenosti bodu P od bodů A a B jsou stejné. Navíc je délka úsečky AC stejná jako délka úsečky CP. Dokažte, že přímka CP dělí úhel při vrcholu C v poměru $2:1$.

Úloha 8. (5 bodů)

V různostranném trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Osy úhlů CAB, BCA protínají protější strany v bodech X, Y a sebe navzájem v I. Nad úsečkou XY sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky XYP a XYQ. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku BPQ. Ukažte, že $OI \perp AC$.