Teorie grup III – Svoboda pro grupy

3. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Na stěnu si chceme pověsit obraz, a to pomocí provázku, který je oběma konci připevněn k jeho rámu. Do zdi je zatlučeno deset hřebíků.

(a) *Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl po vyndání libovolných devíti hřebíků, zatímco po vytažení libovolných osmi bude stále ještě viset.*

(b) *Pět hřebíků je stříbrných a pět zlatých. Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl pouze v případě, když vyndáme všechny hřebíky z jednoho kovu.*

(Kuba Löwit)

Řešení:

Nad možným zavěšením budeme přemýšlet jako nad slovy ve volné grupě tak, jak je popsáno v seriálu.

(a) Označme $a_1, \ldots, a_{10}$ otočky kolem jednotlivých hřebíků v jednom směru a $a_1^{-1}, \ldots, a_{10}^{-1}$ ve směru druhém. Dále uvažme slovo

$$w = a_1 \ldots a_{10} a_1^{-1} \ldots a_{10}^{-1}.$$

Pokud vyndáme devět hřebíků, zbude pouze slovo $a_i a_i^{-1}$, které je ekvivalentní prázdnému slovu. Když naopak vyndáme hřebíků méně, mezi každými dvěma písmeny tvaru a_i, a_i^{-1}, bude nějaké jiné písmeno – vzniklé slovo je ve zkráceném tvaru a triviálně není ekvivalentní slovu prázdnému. Tím jsme ověřili, že naše slovo skutečně vyhovuje zadání.

(b) Analogicky jako v předchozí části označme obmotání kolem stříbrných hřebíků $s_1, \ldots, s_5$ a $s_1^{-1}, \ldots, s_5^{-1}$ a obmotání kolem zlatých $z_1, \ldots, z_5$ a $z_1^{-1}, \ldots, z_5^{-1}$. Uvažme slovo

$$u = s_1 \ldots s_5 z_1 \ldots z_5 s_5^{-1} \ldots s_1^{-1} z_5^{-1} \ldots z_1^{-1}.$$

Jemu odpovídající zavěšení vyhovuje zadání. Když totiž odebereme všechny stříbrné hřebíky, tak zbude slovo z písmen odpovídajících zlatým hřebíkům, které je ekvivalentní prázdnému slovu. Analogicky zbude slovo ekvivalentní prázdnému i po odebrání všech zlatých hřebíků. Když ale zbudou stříbrné i zlaté hřebíky, budou zlatá písmena oddělena od svých inverzů písmeny stříbrnými a naopak. Vzniklé slovo bude proto ve zkráceném tvaru a zřejmě nebude ekvivalentní prázdnému.

Poznámky:

Většina správných řešení byla velmi podobná výše uvedenému vzorovému řešení. Za nezdůvodnění správnosti řešení jsem body tentokrát nestrhával, protože ověřit ji není u těchto slov obtížné. Přesto však považuji za vhodné, aby řešení stručné zdůvodnění obsahovalo.

Za co jsem ale body strhával, bylo řešení druhé části, které se opíralo o fakt, že „na pět zlatých a pět stříbrných hřebíků se lze dívat jako na jeden zlatý a jeden stříbrný, čímž úlohu zjednodušíme na problém vyřešený v seriálu.“ To sice je pravda, ale toto pozorování není zřejmé a za plný počet bodů by si zasloužilo alespoň stručný komentář. Je totiž vhodné nastínit, že je možné každou pětici hřebíků obmotat provázkem, aniž bychom obmotali nějaký jiný hřebík.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 2.

Buď A konečná abelovská grupa a B její podgrupa taková, že $|B|$ a $|A/B|$ jsou nesoudělná čísla. Dokažte, že $A \simeq B \times A/B$.

(Filip Bialas)

Řešení:
V celém řešení budeme používat aditivní notaci – tj. grupová operace bude zapisována jako sčítání.

Dokážeme nejdříve následující tvrzení: Mějme dvě (ne nutně abelovské) grupy G, H s nesoudělnými řády. Potom libovolná podgrupa grupy $G \times H$ je tvaru $A \times B$, kde A je podgrupa G a B podgrupa H.

Mějme libovolnou podgrupu C grupy $G \times H$. Stačí nám ukázat, že pokud $(g, h) \in C$, pak i $(g, 0) \in C$ a $(0, h) \in C$. Proč to stačí? Podgrupa C bude pak generována prvky tvaru $(g, 0)$ a $(0, h)$, které budou jistě tvořit podgrupy $A \times \{0\}, \{0\} \times B$ grupy $G \times H$, kde A je nějaká podgrupa G a B nějaká podgrupa H. Tyto prvky vygenerují právě grupu $A \times B$. Z čínské zbytkové věty ale můžeme najít takové přirozené n, že $|G| \mid n$ a $|H| \mid n - 1$ (zde využíváme nesoudělnost řádů grupy G a H). Pokud sečteme prvek (g, h) n-krát, tak s použitím Lagrangeovy věty vidíme, že dostaneme prvek $(0, h)$. Symetricky bychom dostali i prvek $(g, 0)$. Jelikož podgrupa musí být uzavřená na sčítání, patří tyto prvky do C, jak jsme chtěli ukázat.

Jednoduchou indukcí dostáváme toto tvrzení i pro direktní součin libovolného počtu grup s po dvou nesoudělnými řády. Nyní se vraťme k zadané úloze. Ze seriálu víme, že každá konečně generovaná abelovská grupa A je izomorfní direktnímu součinu cyklických grup s řády mocnin prvočísel. Označme $p_1, \ldots, p_k$ prvočísla, která dělí řád grupy A. Potom $A \simeq X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_k}$, kde X_{p_i} je direktní součin cyklických grup s řády mocnin prvočísla p_i. Každá z grup X_{p_i} má tedy řád mocniny prvočísla a každá jiného. Jejich řády jsou tedy po dvou nesoudělné a z našeho tvrzení dostáváme, že libovolná podgrupa $B \leq A$ je izomorfní $Y_{p_1} \times \cdots \times Y_{p_k}$, kde Y_{p_i} je podgrupa X_{p_i} pro každé i. Pokud by ale některá z Y_{p_i} nebyla triviální nebo nebyla rovna X_{p_i}, dělilo by p_i jak řád grupy B, tak $\frac{|A|}{|B|}$, což je řád grupy A/B. To se však ze zadání nemůže stát. Dostáváme tedy, že je B izomorfní direktnímu součinu X_{p_i} pro některá z prvočísel p_i a A/B izomorfní direktnímu součinu X_{p_i} právě přes zbylá prvočísla. (To není vůbec těžké ukázat – stačí si uvědomit, že každý koset je reprezentován tím, co je v těchto zbylých grupách.) Grupa $B \times A/B$ je pak zřejmě izomorfní A, jak jsme měli dokázat.

Poznámky:
Úloha možná vypadala pro někoho až moc jednoduše a někteří si bohužel neuvědomili některé její zákeřnosti. V různých obměnách se vyskytovalo tvrzení ze vzorového řešení ale bez předpokladu nesoudělnosti řádů grup. Pro obecné (ne nutně abelovské) grupy bez tohoto předpokladu tvrzení neplatí. Jako protipříklad slouží např. podgrupa grupy $S_3 \times S_3$ tvořená prvky (π, σ) takovými, že permutace π, σ mají stejnou paritu. Tato podgrupa není izomorfní direktnímu součinu $G \times H$, kde G i H jsou podgrupy S_3.

Přiznáme se, že si nejsme jisti platností tohoto tvrzení, pokud se omezíme pouze na abelovské grupy, ale rozhodně nám nepřijde zřejmé. Podgrupy direktních součinů totiž můžou vypadat i velice nepřirozeně – příkladem může být abelovská grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a její podgrupa generovaná prvkem $(1, 1)$.

(Filip Bialas)

Úloha 3.

Mějme volnou grupu F_2 nad písmeny $\{a, b\}$. Ukažte, že podgrupa H generovaná všemi součiny tvaru $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ pro celá čísla m, n je izomorfní volné grupě s nekonečnou volnou bází.

(Kuba Löwit)

Řešení:

1. řešení (přímočará indukce): Pokud se m nebo n rovná nule, pak se $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ zredukuje na e, a proto můžeme tyto prvky ignorovat. Nyní předpokládejme, že m, n jsou nenulová. U zbylých nekonečně mnoha prvků dokážeme, že se již jedná o volnou bázi, tzn. neexistuje mezi nimi netriviální relace. Ekvivalentně neexistuje netriviální kombinace, která by dala identitu, neboť můžeme všechny prvky převést na jednu stranu. Potom se můžeme na bloky $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ dívat jako na jednotlivá písmena, čímž získáme dobře definovaný izomorfismus s příslušnou volnou grupou.

Zde netriviální rozumíme takovou kombinaci, v níž se nevyskytují sousední k sobě inverzní součiny, neboť ty by bylo zbytečné uvažovat. Mějme řetězec součinů $s_1 s_2 \dots s_k$. Indukcí podle k ukážeme, že je-li $s_1 = a^n b^m a^{-n} b^{-m}$, pak zredukovaný řetězec začíná na $a^n b^m$. Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k - 1$, pak naším cílem bude dokázat ho pro k. Nechť $s_1 = a^n b^m a^{-n} b^{-m}$. Aby zredukovaný řetězec nezačínal na $a^n b^m$, musí se oba $a^{-n} b^{-m}$ vykrátit, tzn. dva první úseky řetězce $s_2 \dots s_k$ jsou $b^m a^n$. Podle indukčního předpokladu se jedná o dva první úseky součinu s_2. Z toho plyne, že s_1 jsou s_2 jsou vůči sobě inverzní, což jsme zakázali.

Žádná netriviální kombinace nikdy nedává identitu, neboť se nikdy nevykrátí první dva úseky prvního součinu.

2. řešení (trikové): Volná grupa na dvou prvcích je fundamentální grupa grafu C se dvěma očky. Jedno očko znázorňuje prvek a a druhé prvek b. Uvažujme orientovaný graf D nekonečné čtvercové mřížky, kde všechny horizontální hrany vedou stejným směrem a všechny vertikální hrany vedou také stejným směrem. Je vidět, že D kryje C, a ze seriálu víme, že fundamentální grupa krycího grafu je podgrupa grupy F_2. Vrhněme se nyní na úlohu.

Ukážeme, že fundamentální grupa grafu D je právě H. Zvolme libovolný bázový vrchol x. Fundamentální grupa grafu D jistě obsahuje všechny prvky tvaru $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$. Jedná se totiž o obdélníky s jedním vrcholem v x. Zbývá ukázat, že tyto prvky generují všechny procházky začínající a končící v x. Takové procházky jsou mnohoúhelníky obsahující x, jejichž algebraické zápisy jsou ve tvaru $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k}$, kde součet všech m, resp. n je nulový, neboť abychom začali a skončili ve stejném bodě, potřebujeme dělat stejný počet kroků doleva a doprava, resp. nahoru a dolů. Nyní kýžený výsledek dokážeme indukcí podle počtu bloků a, b. Pokud takových bloků máme jen 1 nebo 2, pak se již podle podmínky musí jednat o identitu. Pokud je bloků více, pak

$$a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k} = (a^{m_1} b^{n_1} a^{-m_1} b^{-n_1})(b^{n_1} a^{m_1+m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k}).$$

Druhá závorka na pravé straně má o jeden blok méně než počáteční prvek a součty exponentů jak u a, tak u b jsou pořád nulové, tudíž můžeme aplikovat indukční předpoklad.

Teď stačí, abychom ukázali, že fundamentální grupa nekonečné čtvercové mřížky je nekonečně generovaná. Uvažujme libovolnou kostru. V každém políčku musí alespoň jedna hrana v této kostře chybět, a proto po odebrání kostry zůstane nekonečně mnoho hran a jsme hotovi.

Poznámky:

Přes náročnost letošního seriálu došla dvě správná řešení, což si zaslouží moji pochvalu. Jedno další řešení se odvážilo zaobírat postupem trikového řešení.

(Anh Dung „Tonda“ Le)