Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE   TERMÍN ODESLÁNÍ: 13. KVĚTNA 2019

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Nadaní australští pavouci upletli přes noc pavučinu ve tvaru krychle. Do rána se na její stěny nachytaly mouchy, přičemž na každé stěně byla chycena alespoň jedna. Když druhý den přišel Martin k pavučině, představil si v každém vrcholu součin počtů much na jeho přilehlých stěnách. Všiml si, že součet těchto ohodnocení vrcholů je roven 2019. Fíla k němu ihned přiběhl, chvíli se na pavučinu koukal a pak prohlásil, že mu nevěří. Který z chlapců má pravdu? (2 BODY)

(b) Poté, co se chlapci dohádali, si pavouci uložili všechny mouchy do vrcholů takovým způsobem, že v každých dvou byl různý nenulový počet much. Přes noc se na hrany krychle nachytali mravenci. Madam Verča si všimla, že pro každou hranu je počet mravenců na ní roven největšímu společnému děliteli počtů much na příslušných koncových vrcholech. Mohlo se nachytat stejně much jako mravenců? (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Nechť a a b jsou kladná reálná čísla. Rado si nakreslil pravidelný šestiúhelník se stranami délky a a zvenku na každou stranu nalepil obdélník o stranách a a b (k šestiúhelníku přilepený stranou délky a). Všiml si, že ty vrcholy obdélníků, které nejsou vrcholy původního šestiúhelníku, leží na jedné kružnici o poloměru r. Hedvika jeho postup zopakovala, ale s prohozenými hodnotami a a b. Tím dostala kružnici o poloměru h. Ukažte, že $r = h$. (2 BODY)

(b) V obdélníku $ABCD$ označme P a Q středy stran BC a CD. Úsečka BQ protíná úsečky AP a PD postupně v bodech K a L. Úsečky PD a AQ se protínají v bodě M. Středy úseček MA, AK a KL si označíme postupně X, Y a Z. Ukažte, že kolmice z X na BQ, z Y na PD a ze Z na AQ se protínají v jednom bodě. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

(a) Ať $k \geq 2$ je přirozené číslo. Dokažte, že

$$(k-1)^2 \mid k^{k-1} - 1.$$

(2 BODY)

(b) Je dáno prvočíslo p a přirozená čísla m, n taková, že $m < n < p$. Dále nechť platí

$$p \mid m^2 + 1 \qquad \text{a} \qquad p \mid n^2 + 1.$$

Dokažte, že

$$p \mid mn - 1.$$

(3 BODY)

Úloha 4.

(a) Řešte v $\mathbb{Z}$:

$$x^2 - 6x + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

(2 body)

(b) Řešte v $\mathbb{N}_0$ pro $a \geq b \geq c \geq d$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$

(3 body)

Úloha 5.

(a) Viki vyhrál v tombole N kapybar a vykrmil je tak, že žádné dvě z nich nevážily stejně a váha každé v kilogramech byla racionální číslo. Chtěl se před svými kamarády předvést, a tak prohlásil, že kdykoliv mu libovolnou jednu z nich vezmou, umí on zbylé kapybary rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) skupin, aby obě dvě skupiny měly stejný součet hmotností. Pro která sudá N mohl Vikimu trik fungovat? (2 body)

(b) Filip našel 2019 bezedných pytlů s penězi – v prvním jsou jednokoruny, v druhém dvoukoruny, ve třetím trojkoruny atd. Mince různých hodnot vypadají stejně, ale jejich hodnota je přímo úměrná jejich váze. Jednoho dne foukal vítr a zpřeházel popisky u pytlů značící hodnoty mincí v nich. Filip pak popisky k pytlům rozdělil po paměti, ale není si jistý, jestli někde neudělal chybu. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách umí zjistit, jestli popisky rozdělil správně? (3 body)

Úloha 6.

(a) Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se protínají v bodech X a Y. Označme P průsečík k_2 a tečny ke k_1 v bodě X a Q průsečík přímky S_1Y a kružnice k_2. Ukažte, že $PQ \parallel S_1S_2$. (2 body)

(b) Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y. Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z. Ukažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce. (3 body)

Úloha 7.

Na ministerstvu dopravy je k kanceláří. Ty jsou propojeny sofistikovanou potrubní poštou tak, že pro každých n kanceláří existuje další kancelář, která je s každou z nich přímo spojena. Nový ministr dopravy by si chtěl vybrat kancelář, ze které jde bez prostředníka komunikovat se všemi ostatními.

(a) Dokažte, že pro $k = 2n + 2$ může být ministerstvo postaveno natolik nefunkčně, že se mu to nepodaří. (2 body)

(b) Dokažte, že pro $k = 2n + 1$ si vždy svou vysněnou kancelář vybrat umí. (3 body)