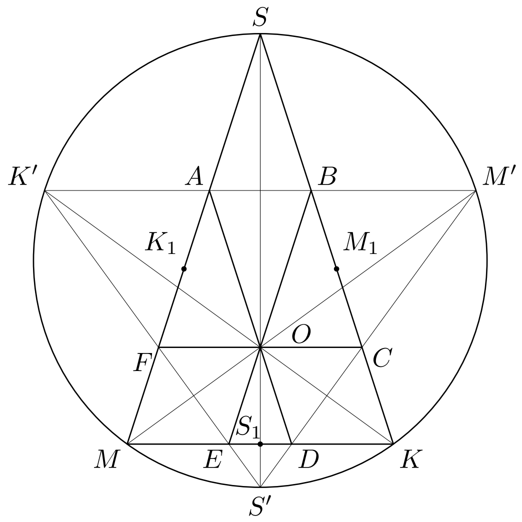
Příklad 8. Osy úhlů $\sphericalangle KMS$, $\sphericalangle MKS$ a $\sphericalangle KSM$ protnou kružnici opsanou trojúhelníku MKS postupně v bodech M', K' a S'. Úsečky $M'K'$ a $M'S'$ dělí stranu KS na tři části. Střed prostřední části označme M_1. Obdobně definujme body K_1 a S_1. Dokažte, že úsečky MM_1, KK_1 a SS_1 procházejí jedním bodem tehdy a jedině tehdy, pokud je $\triangle MKS$ rovnoramenný.



Poznámka. Nejprve uveďme obecně platná pravidla, která budeme v textu používat. Jsou to základní vlastnosti tětovového čtyřúhelníku (ZVTC) a dále fakt, že obraz ortocentra libovoného trojúhelníku podle přímek procházejících stranami trojúhelníku leží na kružnici opsané (VOT) a vlastnost trojúhelníku takovou, že osa úhlu protíná kružnici opsanou v témže bodě jako osa strany (důsledek ZVTC).

Řešení. Sledujme situaci a označní dle obrázku. Nejprve ukažme, že $\triangle MEF$ je rovnoramenný se základnou EF. Obdobně platí i pro $\triangle KCD$ a $\triangle SAB$. Tvrzení dokážeme pro $\triangle MEF$, tedy stačí ukázat, že EF je kolmá na MM'. Označme si průsečík MM' s EF jako X. Musí platit

$$|\sphericalangle K'XM'| = 180^\circ - (|\sphericalangle M'K'K| + |\sphericalangle K'M'M| + |\sphericalangle S'K'K|).$$

Podle (ZVTC) víme, že $|\sphericalangle M'K'K| = |\sphericalangle M'ME|$, $|\sphericalangle K'M'M| = |\sphericalangle K'KD|$ a $|\sphericalangle S'K'K| = |\sphericalangle S'SK|$ a ze zadání víme, že

$$2|\sphericalangle M'ME| + 2|\sphericalangle K'KD| + 2|\sphericalangle S'SK| = 180^\circ.$$

Pouhou úpravou a dosazením dostáváme, že $|\sphericalangle K'XM'| = 90^\circ$, což je nutná a postačující podmínka aby $\triangle MEF$ byl rovnoramenný.

Z předchozí vlastnosti (kolmost) plyne také to, že prúsečík O úseček MM', KK' a SS' je ortocentrem trojúhelníku $M'K'S'$. Tedy dle (VOT) je $|XM| = |XO|$ a obdobně pro K i S. Čtyřúhelník $MEOF$ (resp. $KDOC$, resp. $SAOB$) je rovnoběžník a i úsečky EB a MS (resp. DA a KS, resp CF a KM) jsou rovnoběžné a tedy můžeme najít mnoho podobných trojúhelníků.

Nyní si zavedeme jednodušší značení délek stran. Označme jako $a = |ME| = |MF|$, $b = |KC| = |KD|$, $c = |SB| = |SA|$, $x = |M_1B| = |M_1C|$, $y = |K_1A| = |K_1F|$ a $z = |S_1E| = |S_1D|$. Snadno ukážeme, že $a = b$ (nebo jiná libovolná dvojice) právě tehdy když $\triangle MKS$ je rovnoramenný. $\triangle EDO$ je podobný $\triangle MKS$. Avšak strany $\triangle EDO$ jsou tvořeny délkami a, b a $2z$.

Vyjděmě z podobnosti $\triangle EDO \simeq \triangle FOA \simeq \triangle MDA$. Tedy platí

$$\frac{b}{b+c} = \frac{a}{2y+a}, \qquad \frac{c}{c+b} = \frac{2y}{2y+a}.$$

Levou rovnost znásobíme c, pravou b a po úpravě dostáváme

$$2yb = ac.$$

Obdobně (cyklickou záměnou) $2xa = bc$ a $2zc = ab$.

Nyní použijeme Cévovu větu. Úsečky M_1M, K_1K, S_1S se protnou právě tehdy jen tehdy, když platí

$$(x+b)(y+c)(z+a) = (x+c)(y+a)(z+b).$$

Pomocí ekvivalentních úprav a dosazením za x, y, z výrazy s a, b, c. dostaneme následující rovnici.

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = 0$$

Ukažme, že neexistuje trojice navzájem různých čísel a, b, c která by řešila danou rovnici. Búno předpokládejme, že $a = b + \delta$, kde $\delta > 0$. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\delta(c-b) = 0.$$

avšak pokud je $\delta \neq 0$, potom $c = b$ a to je spor, je li $\delta = 0$ potom $a = b$ a to je rovněž spor.

Protože rovnice má řešení právě tehdy, když nastává rovnost mezi libovolnou dvojicí z a, b, c, úsečky se protínají právě tehdy pokud je trojúhelník MKS rovnoramenný.