

Antirovnoběžnost

MICHAL „KENNY“ ROLÍNEK

ABSTRAKT. Příspěvek vysvětluje princip antirovnoběžnosti na mnoha úlohách z českých i zahraničních soutěží. Ukazuje i využití antirovnoběžnosti v moderní geometrii trojúhelníka.

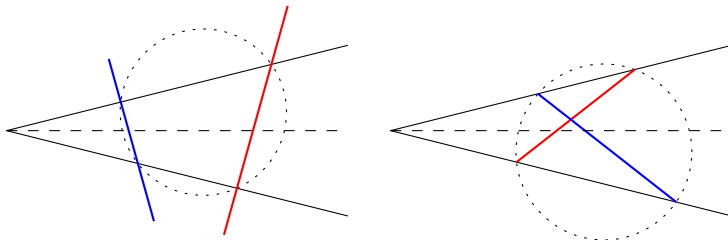
O co jde?

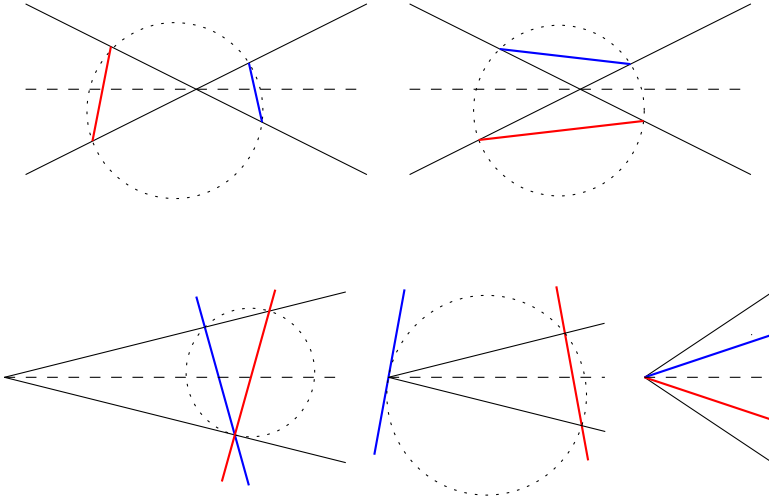
Definice. Je dán úhel XVY a jeho osa o . Přímky p a q nazveme *antirovnoběžné* v úhlu XVY , pokud pro osový obraz p' přímky p podle o platí $p' \parallel q$. Pokud navíc $V \in p$ a $V \in q$, říkáme, že p a q jsou *izogonální* v úhlu XVY .

Úhlem v přechodí definici rozumíme i dvojici rovnoběžných přímk. Osou úhlu pak v tomto případě rozumíme osu pásu mezi rovnoběžkami.

Bez nároku na přesnou formulaci a přesný důkaz uvedeme klíčové tvrzení, které propojí antirovnoběžnost s tětivovými čtyřúhelníky.

Tvrzení. Přímky p a q jsou antirovnoběžné v daném úhlu, právě když nastane jedna ze situací zachycených na obrázcích níže.





Tvrzení. Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.

Tvrzení. Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak dvojice antirovnoběžných přímk v těchto úhlech splývají.

Lehké příklady

Příklad 1. Na kružnici k je dána tětiva AB . Označme \check{S} střed kratšího oblouku AB . Bodem \check{S} vedeme dvě různé přímky, které protnou AB a k ve čtyřech dalších bodech. Ukažte, že tyto body leží na kružnici.

Příklad 2. Ať $ABCD$ je tětivový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB and BPC jsou kolmé.

Příklad 3. Jsou dány kružnice k, l , které se protínají v bodech A, B . Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL . Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN . Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL .

(Domácí kolo MO 2010)

Příklad 4. Ať ABC je trojúhelník. Kružnice procházející body B a C protne strany AB a AC podruhé postupně v C' a B' . Ukažte, že BB', CC' a HH' , kde H a H' jsou postupně ortocentra trojúhelníků ABC a $AB'C'$, procházejí jedním bodem.

(IMO shortlist 1995)

Kamarádi H a O

Tvrzení 5. V $\triangle ABC$ je H průsečík výšek a O střed kružnice opsané. Pak AH a AO jsou izogonální v úhlu BAC .

Příklad 6. V trojúhelníku ABC platí, že výška a těžnice z vrcholu A rozdělí úhel BAC na třetiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 7. V trojúhelníku ABC platí, že výška, těžnice a osa úhlu z vrcholu A rozdělí úhel BAC na čtvrtiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 8. Úhlopříčky AC a BD tětívového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P . Středů kružnic opsaných $ABCD$, ABP , BCP , CDP a DAP označme postupně O , O_1 , O_2 , O_3 a O_4 . Ukažte, že OP , O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem.

(Čína 1990)

Příklad 9. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách BC a AC takové, že A , B , D a E leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D , E a C protne stranu AB ve dvou bodech X a Y . Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z C na AB .

(Baltic Way 2010)

Příklad 10. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají ve dvou bodech A a B . Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D . Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD . Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3 , který obsahuje bod B . Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L . Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé.

(MEMO 2011)

Symediány

Definice 11. Je dán trojúhelník ABC . Přímku, která je izogonální s těžnicí z vrcholu A v úhlu BAC , nazveme *A-symediánou* trojúhelníka ABC .

Tvrzení 12. Ke kružnici opsané $\triangle ABC$ sestrojíme tečny v bodech B a C a jejich průsečík označíme S . Pak AS je symediána v $\triangle ABC$.

Příklad 13. Ať ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB . Dále nechť P je jeho vnitřní bod takový, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PBC|$. Označme M střed AB . Ukažte, že $|\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BPC| = 180^\circ$.

(Polsko 2000)

Příklad 14. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2 , které se protínají v bodech A a B . Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B , který označíme L . Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A , který označíme K . Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC , prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C .

(zobecněné domácí kolo MO 2011)

Tvrzení 15. *Symediány se protínají v jednom bodě. Nazveme ho Lemoinovým bodem $\triangle ABC$.*

Příklad 16. Bud' ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L . Rovnoběžka s AB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2 . Podobně definujeme A_1, A_2, B_1, B_2 . Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Příklad 17. Bud' ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L . Antirovnoběžka s AB v úhlu ACB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2 . Podobně definujeme A_1, A_2, B_1, B_2 . Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Isogonal conjugates

Definice 18. Body P a P' v trojúhelníku ABC nazveme *isogonal conjugates* vůči $\triangle ABC$, pokud jsou AP a AP' izogonální v úhlu BAC a podobně dvojice přímk BP, BP' a CP, CP' jsou izogonální postupně v úhlech ABC a BCA .

Tvrzení 19. *Ke každému bodu v rovině, který neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, existuje isogonal conjugate vůči $\triangle ABC$.*

Příklad 20. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Pak projekce bodů P a P' na strany trojúhelníka leží na jedné kružnici.

Příklad 21. Je dán trojúhelník ABC , Γ je Gergonneův bod a H^+ střed kladné stejnoolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak Γ a H^+ jsou isogonal conjugates.

Příklad 22. Je dán trojúhelník ABC , N je Nagelův bod a H^- střed záporné stejnoolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak N a H^- jsou isogonal conjugates.

Příklad 23. Uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$ je dán bod P neležící na BD tak, že $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|$. Ukažte, že $ABCD$ je tětiový právě tehdy, když $|AP| = |PC|$. (IMO 2004)

Příklad 24. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vůči $\triangle ABC$. Ukažte, že P' je střed kružnice opsané trojúhelníku tvořenému obrazy bodu P přes strany $\triangle ABC$.

Příklad 25. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic, jejichž průměry jsou tyto úsečky, je isogonal conjugate středu kružnice k . (zobecněně IMO 2008)

Příklad 26. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P . Označme A' , B' , C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále necht' A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A' . Konečně nalezneme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$.

(iKS G3)

Tvrzení 27. Je dán $\triangle ABC$ a přímka ℓ . Množina bodů X' , které jsou isogonal conjugate k nějakému bodu $X \in \ell$, je kuželosečka.

Příklad 28. (General Feuerbach Theorem) Je dán $\triangle ABC$ a v něm X a X' isogonal conjugates. Pokud přímka XX' prochází středem O kružnice opsané $\triangle ABC$, pak kružnice opsaná projekcím bodů X a X' na strany $\triangle ABC$ se dotýká kružnice devíti bodů.

Příklad 29. Je dán trojúhelník ABC ($|AB| \neq |AC|$). Na jeho výšce AA_0 , kde A_0 leží na BC , zvolíme bod X . Označíme B_1 resp. C_1 průsečíky BX s AC , resp. CX s AB . Pokud je BCC_1B_1 tětiový, ukažte, že X je průsečík výšek trojúhelníka ABC .
(Celostátní kolo MO 2007)

Literatura a zdroje

- [1] Nathan Altshiller-Court: *College Geometry*, Dover Publication, New York, 2007
- [2] <http://www.mathlinks.ro>