Geometria

Zuzka Pôbišová

Na prednáške si zopakujeme vety o obvodových a stredových uhloch a mocnosti bodu ku kružnici a budeme riešiť príklady v ktorých sa využívajú. Na záver si dokážeme niekoľko jednoduchých vlastností trojuholníka na ktoré sa často zabúda a môžu sa hodiť.

Veta. (Obvodové a stredové uhly) *Majme kružnicu k so stredom S, jej tetivu AB a ľubovoľný bod $M \in k$ na väčšom (menšom) oblúku AB. Potom menší (väčší) z uhlov ASB nazývame stredový uhol príslušný k tetive AB a uhol AMB obvodový a platí $2|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ASB|$.*

Veta. (Úsekový uhol) *Majme kružnicu k so stredom S, jej tetivu AB a dotyčnicu AX ku kružnici v bode A. Uhol BAX nazývame úsekový uhol a má rovnakú veľkosť ako obvodový uhol príslušný k tomu oblúku AB, ktorý leží v opačnej polrovine určenej priamkou AB ako uhol BAX.*

Veta. (Mocnosť) *Majme kružnicu k a bod P. Bodom P vedieme ľubovoľnú sečnicu kružnice k, ktorá ju pretne v bodoch A, B. Mocnosť bodu P ku kružnici k definujeme ako $\mu(P,k) = |PA| \cdot |PB|$ a je rovnaká pre všetky sečnice kružnice k prechádzajúce bodom P. Ak t je dotyčnica ku kružnici k z bodu P, tak $A = B$ a $\mu(P,k) = |PA|^2$.*

Príklad. Nech k_1, k_2 sú kružnice pretínajúce sa v dvoch bodoch A, B. Priamky p, q také, že $A \in p$, $B \in q$ pretínajú k_1 a k_2 v dalších štyroch bodoch, C, $D \in k_1$, E, $F \in k_2$. Dokáž, že CD a EF sú rovnobežné.

Príklad. Nech k_1, k_2 sú kružnice pretínajúce sa v dvoch bodoch A, K. Potom zostrojíme ΔKLM taký, že $A \in LM$, $L \in k_1$ a $M \in k_2$. Kedy bude mať ΔKLM najväčší obsah?

Príklad. Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A, B. Na k_1 sú ďalej dané 2 rôzne body C, D. Sečnica BC vytína na k_2 bod E, podobne BD bod F. Dokáž, že ak $|DF| = |CE|$, tak bod A je rovnako vzdialený od priamok BC a BF.

Príklad. Majme 3 zhodné kružnice pretínajúce sa v jednom bode O. Ostatné priesečníky označme A, B, C. Dokáž, že O je ortocentrum ΔABC.

Príklad. Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokáž, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

Veta. *V trojuholníku ABC nech os uhla ACB pretína stranu AB v bode X.*

Potom

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AX|}{|BX|}.$$

Tj., os uhla v trojuholníku rozdeľuje protiľahlú stranu v pomere priľahlých.

Veta. *V trojuholníku ABC nech p je os uhla ACB, q nech je os strany AB a k nech je kružnica opísaná trojuholníku ABC. Potom p, q, k sa pretínajú v jednom bode. Tj., os uhla a os protiľahlej strany sa pretínajú na opísanej kružnici.*

Veta. *V trojuholníku ABC nech O je ortocentrum a výška na stranu AB nech sa pretína so stranou AB v bode Y a s opísanou kružnicou v bode X. Potom $|OY| = |YX|$. Tj., výška pretína opísanú kružnicu v bode súmerne združenom s ortocentrom podľa strany trojuholníka.*

Veta. *V trojuholníku ABC nech X je päta výšky na stranu AB a Y nech je priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Potom*

$$|\sphericalangle XCY| = \left| \frac{|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BAC|}{2} \right|.$$

Tj., uhol medzi osou uhla a výškou prislúchajúcou k jednému vrcholu sa rovná polovici rozdielu zvyšných dvoch uhlov v trojuholníku.