Geometrická zobrazení

Franta Konopecký

Geometrická zobrazení jsou nádherná kapitola matematiky, do které když proniknete, tak už neuniknete. Pro lepší představu v tomto příspěvku najdete stručný přehled, co geometrická zobrazení jsou, jaké mají vlastnosti a příklady na ně. Rozlišujeme tři základní skupiny zobrazení – shodná, podobná a jiná.

Definice. *Zobrazení f je dáno, je-li k libovolnému bodu X (prvku dané množiny, např. roviny) určen jednoznačně bod $X' = f(X)$ jako jeho obraz.*

Shodná zobrazení

Definice. *Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá* shodné zobrazení, *právě když pro libovolné různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy platí $\frac{X'Y'}{XY} = 1$.*

Shodnými transformacemi jsou posunutí (včetně identity), otočení (včetně středové souměrnosti), osová souměrnost a posunutá souměrnost. Předpokládám samozřejmost těchto pojmů, proto se s jejich výkladem nebudeme zdržovat.

Věta. *Trojúhelníkem XYZ a s ním shodným trojúhelníkem $X'Y'Z'$ je určena shodná transformace roviny.*

Věta. *Libovolné shodné zobrazení roviny je buď osovou souměrností, nebo je lze rozložit na nejvýše tři osové souměrnosti.*

Cvičení. V jedné polorovině s hranicí m jsou dány body A, B. Sestrojte na přímce m takový bod X, aby lomená čára AXB byla co nejkratší.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je částí osy úhlu ABC, jsou-li dány délky jeho čtyř stran a, b, c, d.

Cvičení. Je dán úhel AVB s vnitřním bodem D. Sestrojte všechny kružnice, které procházení bodem D a dotýkají se ramen úhlu AVB.

Cvičení. Jsou dány body A, B, C ležící v tomto pořadí na přímce p a přímka q kolmá k přímce p v bodě C. Sestrojte na přímce q takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

Cvičení. V rovině zbyly z trojúhelníku ABC jen osy úhlů β, γ a bod A. Zrekonstruujte trojúhelník ABC.

Cvičení. Je dán ostrý úhel AVB a bod X jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod Y a na rameni VB bod Z tak, aby měl trojúhelník XYZ co nejmenší obvod.

Cvičení. Jsou dány body A, B. Vyšetřete množinu bodů, které jsou souměrné s bodem A podle některé přímky procházející bodem B.

Cvičení. V rovině je dána přímka p a mimo ni dva různé body A, B. Sestrojte na přímce p bod X tak, aby odchylka přímky AX od přímky přímky p byla dvojnásobkem odchylky přímky BX od přímky p.

Věta. *Zobrazení složené z posunutí t_1, t_2 určených vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ je posunutí t_3 určené vektorem $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.*

Cvičení. Jsou dány kružnice k, l a přímka p. Sestrojte přímku q rovnoběžnou s přímkou p tak, aby vytínala stejně dlouhé tětivy na obou kružnicích.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho čtyř stran a, b, c, d a odchylku ω přímek a, c.

Cvičení. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho úhlopříček e, f, úhel ω, který tyto úhlopříčky svírají, a vnitřní úhly α, β čtyřúhelníku.

Věta. *Každé posunutí $T(\mathbf{v})$ lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, které jsou kolmé na směr posunutí a jejichž vzdálenost je $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|$. Každé otočení $R(S, \alpha)$ lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy se protínají ve středu S a svírají úhel $\frac{1}{2}\alpha$.*

Věta. *Složení dvou otočení je otočení nebo posunutí.*

Cvičení. Jsou dány tři rovnoběžné přímky a, b, c, na přímce a leží bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod B ležel na přímce b a C na c.

Věta. *Složením dvou středových souměrností $S_1(S_1), S_2(S_2)$ dostaneme posunutí o vektor $2\boldsymbol{S_1S_2}$.*

Cvičení. Sestrojte lomenou čáru $ABCDE$, jsou-li dány body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které jsou středy úseček AB, BC, CD, DE, EA.

Cvičení. Existuje útvar se dvěma středy souměrnosti?

Cvičení. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY.

Cvičení. Jsou dány body A, B a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte na kružnici k takové body C, D, aby platilo $AC||BD$ a úhel CSD měl danou velikost α.

Věta. *Zobrazení složené z libovolného sudého počtu osových souměrností je identita, posunutí nebo otočení. Zobrazení složené z libovolného lichého počtu osových souměrností je osová souměrnost nebo posunutá souměrnost.*

Podobná zobrazení

Definice. *Zobrazení roviny σ na rovinu σ se nazývá* shodné zobrazení, *právě když existuje kladné číslo k takové, že pro libovolné dva různé body X, Y roviny σ a jejich obrazy platí $\frac{X'Y'}{XY} = k$.*

Podobnými transformacemi jsou stejnolehlost a spirální podobnost.

Stejnolehlost si můžeme představit tak, že si chytneme rovinu za jeden pevný bod a jinak ji celou roztáhneme nebo zmenšíme. Takto se nám tvar ani orientace objektů nezmění, změní se jen jejich velikost. Zachovává se rovnoběžnost. Přímka se zobrazuje jako přímka, kružnice jako kružnice.

Na spirální podobnost lze použít stejnou představu jen s tím rozdílem, že po zvětšení nebo zmenšení roviny tuto rovinu ještě otočíme. Ve spirální podobnosti se nám tedy zachovává tvar, ale orientace objektů je jiná. Obraz přímky zobrazené ve spirální podobnosti svírá se svým vzorem úhel provedeného otočení.

Věta. *Trojúhelníkem XYZ a jemu podobným trojúhelníkem $X'Y'Z'$ je jednoznačně určena podobná transformace roviny.*

Věta. *Stejnolehlost i spirální podobnost mají vždy právě jeden samodružný bod.*

Věta. *Složením dvou stejnolehlostí je stejnolehlost, případně shodné zobrazení (při opačných koeficientech). Složením dvou spirálních podobností je spirální podobnost, nebo stejnolehlost nebo shodné zobrazení.*

Věta. (Mongeova) *Jsou k_1, k_2, k_3 kružnice s nekolineárními středy a různými poloměry, pak platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlosti každých dvou z těchto kružnic: všechny tři vnější středy stejnolehlosti leží na jedné přímce; každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.*

Cvičení. Je dána kružnice $k(S, r)$ a přímka $p = PQ$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice k a přímky p v bodě P.

Cvičení. Je dána kružnice k a přímky m, n. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n a kružnice k.

Cvičení. Je dána kružnice k a bod P. Sestrojte bodem P přímku p, která protíná kružnici k v bodech A, B tak, že bod A je středem úsečky BP.

Cvičení. V rovnoběžníku $ABCD$ označme M, N po řadě středy stran DC a CB. Dokažte, že úsečky AM, AN dělí úhlopříčku BD na tři shodné části.

Jiná zobrazení

Jiným zobrazením se příliš věnovat nebudeme, spokojíme se s prozrazením, že mezi ně patří afinita, osová afinita, kolineace, kruhová inverze a spousta dalších zobrazení.

Příklady

Příklad 1. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

Příklad 2. Jsou dány dva různé body A, B a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body A, B a vytínají na kružnici k tětivu délky $|AB|$. Bonbónek: Jak by to bylo s obecnou tětivou?

Příklad 3. Sestrojte na stranách AC, CB daného trojúhelníku ABC po řadě body X, Y tak, aby úsečky AX, XY a YB byly shodné.

Příklad 4. Na přímce h jsou dány body A, C, E v tomto pořadí. Ve stejné polorovině vyťaté přímkou h jsou pak rovnostranné trojúhelníky ABC a CDE. Střed úsečky AD označme S_{AD}, střed BE označme S_{BE}. Dokažte, že je trojúhelník $CS_{AD}S_{BE}$ rovnostranný.

Příklad 5. Kružnici k je vepsán rovnostranný trojúhelník ABC. Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice platí: Největší ze vzdáleností bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC je rovna součtu jeho vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů.

Příklad 6. Je dán obecný trojúhelník ABC, který má ke svým stranám připsány rovnostranné trojúhelníky BCX, ACY, ABZ. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě a že dále platí $|AX| = |BY| = |CZ|$.

Příklad 7. V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3$cm, $|PX| = 2,6$ cm, $|QX| = 3,8$ cm. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.

Příklad 8. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a bod X uvnitř tohoto trojúhelníku. Dokažte, že délky $|AX|$, $|BX|$ a $\sqrt{2}|XC|$ jsou délkami stran trojúhelníku.

Příklad 9. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě A a současně se obě dotýkají zevnitř kružnice k v bodech A_1 a A_2. Bod P je jeden z vnějších průsečíků společné vnitřní tečny kružnic k_1 a k_2 s kružnicí k. Konečně body B_i jsou druhé

průsečíky přímek PA_i s kružnicí k_i $(i = 1, 2)$. Dokažte, že se přímka B_1B_2 dotýká obou kružnic k_1, k_2.

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme postupně P, Q a R paty kolmic z bodu D na přímky BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů ABC a ADC protínají na přímce AC.

Příklad 11. . Nechť $ABCD$ je daný konvexní čtyřúhelník s různoběžnými stranami BC a AD. Body E, F leží po řadě uvnitř stran BC a AD tak, že $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|DF|}{|AF|}$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bode Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR pro různé polohy bodů E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P.

Příklad 12*. V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM. (Calábek...)

Literatura

Kdo by se chtěl dozvědět víc, tak tady je seznam mých pramenů:

[1] František Kuřina.*10 geometrických transformací.* Prometheus, 2002
[2] Jaroslav Šedivý. *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách.* edice Škola mladých matematiků, Mír, 1980.
[3] Stránka a stará zadání KMS: `http://www.kms.sk`
[4] Stránka se starými zadáními matematické olympiády: `http://www.math.muni.cz/~rvmo/`