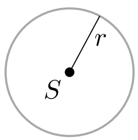
Geometrické množiny bodů

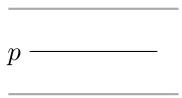
Pepa Tkadlec

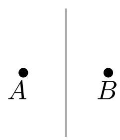
Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní geometrické množiny bodů a obsahuje řadu převážně snadných úloh k nimž jsou na konci uvedeny stručné postupy a výsledky.

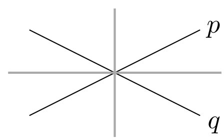
Tvrzení. *Množina bodů, které mají*

(i) *danou vzdálenost r od daného bodu S, je kružnice $k(S, r)$.*
(ii) *danou vzdálenost od dané přímky p, je dvojice přímek rovnoběžných s p.*
(iii) *stejnou vzdálenost od dvou daných bodů A, B, je osa úsečky AB.*
(iv) *stejnou vzdálenost od dvou daných přímek p, q, je dvojice přímek, které jsou osami úhlů vytvořenými přímkami p, q.*









Věta. (Věta o obvodovém úhlu) *Množina bodů, z nichž je daná úsečka AB vidět pod daným úhlem φ, je dvojice kružnicových oblouků symetrických podle přímky AB s krajními body A, B. Speciálně pro $\varphi = 90°$ je hledanou množinou kružnice nad průměrem AB.*

Lehounké úložky

Příklad 1. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q. Najděte množinu středů úseček AB takových, že bod A leží na p a bod B na q.

Příklad 2. Je dán obdélník $ABCD$. Určete množinu bodů X, pro něž $|XA| + |XB| = |XC| + |XD|$.

Příklad 3. Je dána kružnice k a bod O. Určete množinu středů všech úseček OP, kde P probíhá kružnici k.

Příklad 4. Jsou dány body A, B. Najděte všechny přímky p, jejichž vzdálenost od A je stejná jako od B.

Příklad 5. Je dána úsečka AB. Určete množinu obrazů A' bodu A v osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející bodem B.

Příklad 6. Uvnitř kružnice k se středem O je dán bod P. Určete množinu středů všech tětiv AB kružnice k, které procházejí bodem P. Co kdyby bod P ležel vně kružnice k?

Příklad 7. Polem vede rovná cesta, po které se rozjel autobus.

(i) Kde musí člověk stát, aby autobus dostihnul, pokud běží stejnou rychlostí, jakou autobus jede?
(ii) Co kdyby člověk vyrážel o minutu dřív?
(iii) Co kdyby byl člověk dvakrát pomalejší?

Příklad 8. Po ramenech VX, VY pravého úhlu XVY se pohybují body A, B tak, že úsečka AB má konstantní délku d. Určete množinu středů M úseček AB.

Příklad 9. Je dána úsečka AB. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l, které se dotýkají úsečky AB postupně v bodech A, B a navíc mají samy vnější dotyk v T. Určete množinu bodů T.

Běžné příklady

Příklad 10. Na úsečce AC je dán bod B. Určete množinu druhých průsečíků X shodných kružnic, z nichž jedna prochází body A, B a druhá body B, C.

Příklad 11. Osa úhlu ABC protne stranu AC trojúhelníku ABC v bodě D. Najdeme bod E tak, aby $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAC|$ a $|CE| = |AD|$. Dokažte, že střed úsečky DE leží na BC.

Příklad 12. Určete množinu středů všech úseček AB, jejichž krajní body leží na dané půlkružnici t.

Příklad 13. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Určete množinu opsišť, těžišť, ortocenter a vepsišť všech takových trojúhelníků ABC.

Příklad 14. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu opsišť trojúhelníků ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.

(MO 56–A–I–5)

Příklad 15. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB. Označme P patu kolmice vedené středem M strany BC na přímku AC. Určete množinu bodů P.

Příklad 16. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod O tak, že $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle OAC|$, $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OCB|$ a $|\sphericalangle BOC| = 90°$. Určete poměr $|AC| : |OC|$.

(Moskva 2011)

Příklad 17. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Označme D, E, F průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C s protějšími stranami. Ukažte, že $|\sphericalangle DEF| = 90°$.

Návody

1. Nakreslete přímky vodorovně. Jak vysoko leží střed? (Vyjde osa pásu určeného přímkami p, q.)

2. Pro body osy úsečky BC tvrzení platí, pro body „nad“ ní je $|XB| > |XC|$ a $|XA| > |XD|$, pro body „pod“ ní naopak.

3. Stejnolehlost. (Vyjde „poloviční“ kružnice vzhledem k bodu O.)

4. Konstuujte tečny ke stejně velkým kružnicím se středy v A a B. (Vyjdou rovnoběžky s AB a přímky skrz střed AB.)

5. Ukažte, že $\triangle ABA'$ je rovnoramenný. (Vyjde kružnice se středem B a poloměrem $|BA|$.)

6. Tětiva je kolmá na spojnici svého středu se středem kružnice. (Vyjde Thaletova kružnice nad OP případně její oblouk.)

7. Množina bodů, ze kterých je člověk schopen autobus dostihnout v jistém pevném bodě X je kruh. Sjednoťte tyto kruhy přes všechny přípustné body X. (Vyjde postupně polorovina, posunutá polorovina, úhel o velikosti 60°.)

8. Vzdálenost středu přepony od vrcholu s pravým úhlem je rovna polovině délky přepony. (Vyjde čtvrtkružnice se středem V a poloměrem $\frac{1}{2}d$.)

9. Ať vnitřní společná tečna v T protne AB v M. Pak $|MA| = |MT| = |MB|$ (stejně dlouhé tečny). (Vyjde kružnice nad průměrem AB bez bodů A, B.)

10. Úhly $\sphericalangle XAB$ a $\sphericalangle BCX$ jsou obvodové k téže tětivě ze stejně velkých kružnic, takže mají stejnou velikost. (Vyjde osa usečky AC.)

11. Označme A' obraz A podle osy $\sphericalangle BAC$. Pak $A'D$ a CE jsou stejně dlouhé a svírají týž úhel s BC, tedy D je „nad“ BC přesně o tolik, o kolik je E „pod“.

12. Vyjde vnitřek půlkruhu bez půlkruhů nad průměry určenými koncovými body t a jejím středem.

13. Vyjde po řadě bod, „přitřetěný“ oblouk C ke středu strany AB, oblouk nad AB odpovídající úhlu $180° - \gamma$, oblouk odpovídající úhlu $90° + \frac{1}{2}\gamma$ (resp. oblouk posunutý tak, aby procházel A a B).

14. Mocnost S ke všem takovým kružnicím je stejná ($|SB| \cdot |SC|$), takže druhý průsečík k a AS je pevný a množina opsišť je přímka.

15. Ukažte, že všechny takové přímky procházejí středem X tětivy kolmé na AB skrz B. Vyjde pak Thaletova kružnice nad AX.

16. Začněte od $\triangle BOC$, nakreslete obraz C' bodu C přes OB a ukažte, že A je bod dotyku tečny z C ke kružnici opsané $\triangle BOC'$. Z mocnosti vyjádřete hodnotu poměru $\sqrt{2}$.

17. Ukažte, že D a F jsou připsičtě trojúhelníků AEB a ECB.

Literatura a zdroje

[1] Nathan Altschiller-Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.
[2] V. V. Prasolov: *Zadachi po planimetrii*, MCCME, Moskva, 2006.
[3] *http://www.problems.ru*