Goniometrie pomocí komplexních čísel

Matěj Konečný

Abstrakt. Pokročilá přednáška o využití komplexních čísel k řešení goniometrických úloh. Ukážeme si, jak vyjádřit goniometrické funkce pomocí exponenciálního tvaru komplexních čísel a jak tím převést goniometrickou úlohu na úlohu algebraickou. Je potřeba vědět něco o goniometrii, o komplexních číslech, mít dobrou praxi s úpravou výrazů a umět pracovat s aritmetickými a geometrickými řadami a notací sumy a produktu.

Komplexní čísla a jejich exponenciální tvar

Platí, že $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Potom můžeme každé komplexní číslo z, jehož goniometrický tvar je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, zapsat zkráceně jako $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Základní vzorce

Máme

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Sečtením, respektive odečtením těchto dvou rovností můžeme vyjádřit

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

Pokud označíme $z = e^{ix}$, máme

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Rozumíme si?

Cvičení. Odvoďte $\sin(kx)$, $\cos(kx)$.

Řešení. Víme, že $\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$. Dosazením $y = kx$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\left(e^{ix}\right)^k - \left(e^{-ix}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(z^k - z^{-k}\right). \end{aligned}$$

U $\cos(kx)$ postupujeme analogicky.

Cvičení. Dokažte $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cvičení. Vyjádřete $\tan x$, $\cot x$ v závislosti na z.

Cvičení. Dokažte platnost součtových vzorců pro $\sin x$, $\cos x$.

Brnkačka

Úloha 1. Vyřešte $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Úloha 2. Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$. Dokažte:

(i) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$

(ii) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$

Úloha 3. Zjednodušte:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x.$$

Úloha 4. Zjednodušte:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Odmocniny z jedničky

Nechť $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ a $z = e^{i\vartheta}$. Potom $z^n = 1$.

Lemma (Užitečné). *Mějme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a označme n-tý primitivní kořen jedničky jako w (tedy $w^n = 1$ a zároveň $\forall m \in \mathbb{N}, m < n : w^m \neq 1$). Potom pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x - w^k) = x^n - 1.$$

Idea důkazu. Představme si to jako polynom v x a porovnejme kořeny.

Úloha 5. Najděte $2\cos 72^\circ$.

Řešení. $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$. Označme $z = e^{\frac{2\pi}{5}i}$. Potom $z^5 - 1 = 0$, ale protože zřejmě $z \neq 1$, máme

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

My chceme najít $t = z + \frac{1}{z}$. Vydělíme-li rovnost z^2 a přeuspořádáme, dostaneme $(z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0$, tedy $(t^2 - 2) + t + 1 = 0$, což znamená, že $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (druhý kořen je záporný, zatímco $2\cos 72^\circ > 0$).

Úloha 6. Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{1007} \cos^{2014}\left(\frac{k\pi}{1007}\right).$$

(HMMT 2014)

Úloha 7. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

(ISL)

Úloha 8. Nechť $x = \frac{\pi}{7}$. Zjistěte číselnou hodnotu $\tan x \tan 2x \tan 3x$.

Úloha 9. Ukažte, že

$$\sum_{k=1}^{90} 2k \sin 2k^\circ = 90 \cot 1^\circ.$$

(USAMO 1996, Myšmaš 2015)

Trojúhelníky

V následujících sekcích se trojúhelník bude vždy[1] jmenovat ABC s příslušnými úhly α, β a γ. Délky stran budeme značit $|BC|$, $|CA|$ a $|AB|$, obsah S (případně S_{ABC}), poloměr kružnice opsané R a kružnice vepsané r. V řešeních budeme značit $a = e^{i\alpha}$, b a c analogicky (**pozor**, nezaměnit za délky stran).

Trojúhelníky pro začátečníky

Nejprve si ukážeme úlohy, kde se vyskytují pouze goniometrické funkce s úhly v trojúhelníku. Jediné, co k tomu potřebujeme vědět, je, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Potom totiž

$$abc = e^{i\alpha}e^{i\beta}e^{i\gamma} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\pi} = -1.$$

Úloha 10. Ukažte, že v trojúhelníku ABC platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Řešení. Převedeme do komplexních čísel a vynásobíme čtyřmi. Úloha je pak ekvivalentní s

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = 4.$$

To upravíme na

$$4 = \sum_{cyc}\left(a^2 + a^{-2} + 2\right) + abc + \frac{1}{abc} + \sum_{cyc}\left(\frac{ab}{c} + \frac{c}{ab}\right).$$

Pomocí $abc = -1$ to převedeme na

$$0 = \sum_{cyc}\left(a^2 + a^{-2}\right) + \sum_{cyc} -\left(c^{-2} + c^2\right),$$

což platí.

Úloha 11. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1.$$

[1] Až na konečný počet případů.

Úloha 12. Dokažte, že pokud v trojúhelníku ABC platí

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

pak je ABC pravoúhlý.

Úloha 13. Buď ABC trojúhelník, v němž platí

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1.$$

Dokažte, že jeden z úhlů α, β, γ je roven $120°$. (AIME)

Trojúhelníky pro drsňáky

V olympiádních úlohách se obvykle vyskytují i nějaké negoniometrické věci jako například délky stran, obsahy nebo poloměry kružnice vepsané či opsané. Ukážeme si vzorečky, pomocí nichž si všechny tyto parametry vyjádříme v závislosti na R. Protože jsou v R z principu všechny identity homogenní (jsou invariantní vzhledem ke zvětšování), všechna R se nám nakonec vykrátí a zbyde nám k dokázání pouze goniometrická identita.

1) Podle sinové věty je $|BC| = 2R\sin\alpha$ (a cyklicky).

2) $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

3a) $r = \dfrac{2S}{|BC| + |AC| + |AB|}$.

3b) $r = 4R \sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\dfrac{\beta}{2} \sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Úloha 14. Dokažte, že

$$\sum_{cyc} |BC|^3 \cos(\beta - \gamma) = 3|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|.$$

Úloha 15. Dokažte identitu *3b)*.

Úloha 16. Dokažte, že ostroúhlý trojúhelník ABC je rovnoramenný právě tehdy, když

$$|BC|\cos\beta + |AC|\cos\gamma + |AB|\cos\alpha = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2}.$$

Úloha 17. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Návody

1. Zkuste tu goniometrii převést do komplexních čísel.

2. $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

3. Vynásobte to $z - z^{-1}$.

4. Geometrická řada.

6. Použijte binomickou větu a pak prohoďte pořadí vnořených sum.

7. Umocněte na druhou, na levé straně využijte $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pak užitečné lemma.

8. Nemáte šanci, zeptejte se mě na řešení. Fakt to chcete zkusit? Dobře:

$$\sin 7x = 0 \Leftrightarrow \Im(\cos 7x + i \sin 7x) = 0,$$

použijte Moivreovu větu a Viètovy vztahy.

9. Vynásobte to $z - z^{-1}$.

11. Vynásobte společným jmenovatelem a pak obě strany roznásobte.

12. ABC je pravoúhlý právě tehdy, když $i \in \{a, b, c\}$.

13. $120° \in \{a, b, c\} \Leftrightarrow \left(a^3 - 1\right)\left(b^3 - 1\right)\left(c^3 - 1\right) = 0$.

14. Nebojte se roznásobit, vyjde to symetricky.

15. Definujte $\sqrt{z}$ pro $z = e^{i\varphi}$ jako $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}i\varphi}$ (funguje pouze pro $0 \leq \varphi < 2\pi$).

16. ABC je rovnoramenný, pokud

$$\big(|AB| - |BC|\big)\big(|BC| - |CA|\big)\big(|CA| - |AB|\big) = 0.$$

17. Drsňáci nepoužívají hinty.

Zdroj

[1] Vincent Huang: *Complex Numbers in Trigonometry*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c13188h609795