Isogonal Conjugates

Rado van Švarc

Abstrakt. Isogonal conjugates a práce s nimi je oblíbené téma moderní eukleidovské geometrie. V příspěvku jsou popsána některá základní tvrzení, po kterých následuje několik úloh, které se isogonal conjugates buď zabývají, nebo je přímo využívají.

Definice. Nechť bod P leží v rovině trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP a CP zobrazíme podle os úhlů $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCA$. Pokud se tyto tři přímky protínají v jednom bodě Q, pak tento bod nazveme *isogonal conjugate* bodu P vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. *Pokud P neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, pak vzhledem k $\triangle ABC$ má P isogonal conjugate.*

Tvrzení. (Six feet theorem) *Nechť P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Nechť P_a je projekce bodu P na BC. Analogicky definujme P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c. Pak P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c leží na jedné kružnici, jejíž střed splývá se středem PQ.*

Úmluva. Budeme používat *opsiště*, *vepsiště* a *připsiště* jako zkrácený pojem pro střed kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnice připsané. Navíc budeme místo „ortocentrum“ používat pojem *kolmiště*.

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, pak v trojúhelníku ABC bude I, O a H označovat vepsiště, opsiště a kolmiště.

Příklad. V trojúhelníku ABC je I svůj vlastní isogonal conjugate. Dále pokud E je A-připsiště, pak i ono je svým vlastním isogonal conjugate.

Příklad. Body O a H jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC označíme body dotyku kružnice vepsané s BC, CA, AB jako D, E, F. Body dotyku kružnic připsaných se stranami BC, CA a AB si označíme jako X, Y, Z. Pak trojice přímek AD, BE a CF se protíná v jednom bodě a stejně tak i trojice přímek AX, BY, CZ.*

Definice. Ve výše použitém značení se průsečík AD, BE a CF nazývá *Gergonnův bod*. Pro průsečík AX, BY, CZ se používá označení *Nagelův bod*.

Příklad. Nechť H^- je střed záporné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^- je isogonal conjugate Gergonnova bodu.

Příklad. Nechť H^+ je střed kladné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^+ je isogonal conjugate Nagelova bodu.

Příklad. (Brocardovy body) Uvnitř $\triangle ABC$ leží dvojice bodů P a Q tak, že

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi \quad \text{a} \quad \sphericalangle QBA = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QAC = \phi.$$

Potom tyto dva body jsou isogonal conjugates.

OH, oni jsou kamarádi!

Úloha 1. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P. Dále si označme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB, BPC, CPD a DPA jako O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že přímky PO, O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Úloha 2. Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

Úloha 3. V $\triangle ABC$ osa úsečky BH protíná strany AB a BC v bodech D a E. Ukažte, že $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE$. (Crux)

Úloha 4. V $\triangle ABC$ leží body D a E na stranách AB a BC tak, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový. Kružnice opsaná $\triangle DBE$ protne stranu AC ve dvou bodech X a Y. Nechť M je střed XY. Ukažte, že $BM \perp AC$. (Baltic Way 2010)

Úloha 5. Kružnice k_1 a k_2 se středy I_1 a I_2 se protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Další hrátky s isogonal conjugates

Úloha 6. Elipsa s ohnisky P a Q se dotýká stran $\triangle ABC$. Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates.

Úloha 7. V rovině trojúhelníku ABC leží kružnice k se středem X. Tato kružnice protíná stranu AC v bodech B_1 a B_2. Kružnici nad průměrem B_1B_2 nazveme k_b. Analogicky vytvoříme kružnice k_a a k_c. Potenční střed k_a, k_b a k_c označme jako Y. Ukažte, že X a Y jsou isogonal conjugates. (zobecněné IMO 2008)

Úloha 8. (General Feuerbach Theorem) Body P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ a přitom platí, že P, Q a O leží na přímce. Ukažte, že kružnice opsaná projekcím bodů P a Q na strany trojúhelníku se dotýká kružnice devíti bodů.

Úloha 9. Nechť P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou Ω. Průsečík BP s Ω různý od B označme D. Přímka DO protne AC a Ω v M a N. Pokud $BA < BC$, ukažte, že $\sphericalangle AMP = \sphericalangle QNB$. (Zobecněné Rusko 2005)

A je taková hloupost vůbec k něčemu?

Úloha 10. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Nechť A', B', C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná $\triangle A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A''. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $\sphericalangle XAC = \sphericalangle PAB$. Ukažte, že $\sphericalangle AXB = 90°$. ($i$KS 1 – G3)

Úloha 11. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1 a u_2 vycházejícími z A. Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a je dána velikost úhlu β, kde $\alpha < \beta < 180°$. Uvažme všechny možné dvojice bodů X, Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XBY a $\sphericalangle XBY = \beta$. Pak každý z bodů A, B má tu vlastnost, že vidí úsečku XY stále pod stejným úhlem. Ukažte, že existuje třetí bod s touto vlastností. (iKS 4 – G6)

Úloha 12. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice opsaná. Bod P je středem oblouku BAC. Kružnice nad průměrem CP protíná osu úhlu BAC v bodech K a L, kde $AK < AL$. Bod M je obrazem bodu L v osové souměrnosti podle přímky BC. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BKM prochází středem BC.

(ČPS 2013)

Úloha 13. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že přímka BD nepůlí ani úhel $\sphericalangle ABC$, ani $\sphericalangle CDA$. Bod P ležící uvnitř $ABCD$ splňuje $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA$ a $\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $AP = CP$.

(IMO 2004)

Návody

1. Díky isogonálnosti O s H a tětivovosti $ABCD$ je $O_1P \perp CD$ a analogicky pro ostatní, z čehož plyne, že O_1PO_3O a O_2PO_3O jsou rovnoběžníky.

2. Buď je $\triangle BIH \cong \triangle BIO$, nebo je $BOIH$ tětivový čtyřúhelník.

3. Ukažte $\triangle BOC \sim \triangle BDH$ a použijte spirální podobnost.

4. Pokud S je opsiště $\triangle BDE$, pak $BS \perp AC$.

5. Vyúhlete, že E je opsiště $\triangle ACD$.

6. Pokud se elipsa dotýká AC v D, pak $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QDC$. Překlopte Q podle stran.

7. Dokreslete středy k_a, k_b a k_c. Chordála je kolmá na jejich spojnici. Střed k leží na osách B_1B_2 a dalších dvou analogických osách.

8. Nechť PQ protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v X a Y. Pak Simsonovy přímky X a Y jsou na sebe kolmé a protínají se právě v našem bodě dotyku.

9. Dokreslete $D' \in \Omega$ tak, že $DD' \parallel AC$. S trochou úhlení dostaneme $\triangle PAD \sim \triangle AQD'$. Potom dostaneme $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$ a $\triangle AMD \sim \triangle NAD'$.

10. Dokreslete isogonal conjugate k P a použijte six feet theorem. Doúhlete.

11. Ten bod je isogonal conjugate k B vzhledem k (libovolnému) trojúhelníku XAY. Na dokázání toho, že je to pro všechny ten samý bod, použijte definici isogonal conjugate jako střed kružnice opsané obrazům přes strany.

12. Ukažte, že K a L jsou isogonal conjugates a doúhlete.

13. Body A a C jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle BPD$.

Zdroje

Jako primární zdroj bych rád označil příspěvek od Michala „Kennyho“ Rolínka, kterému bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Michal Rolínek: *Antirovnoběžnost*

[2] András Hraskó: *The Isogonal Conjugate*

[3] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*

[4] Tran Quang Hung, Pham Huy Hoang: *Generalization of a Problem with Isogonal Conjugeta Points*

[5] *www.artofproblemsolving.com*