Konvexné útvary

Martin Fraas

Teória konvexných množín je pomerne mladá matematická náuka. Jej rozvoj sa datuje do 20. storočia a je spojený s boomom funkcionálnej analýzy medzi dvoma svetovými vojnami. My sa budeme ďalej zaoberať priestormi konečnej dimenzie, ale vetšina výsledkov ide zovšeobecniť aj na priestory nekonečné. Dôraz bude na metódach dôkazov, ktoré sa dajú na tejto pomerne ľahkej partii ukázať.

Definícia. *Geometrický útvar U (ležiaci v priamke, rovine či priestore) nazývame konvexným ak úsečka spojujúca ktorékoľvek dva body útvaru U náleží útvaru U. Ďalej dodefinujme, že bod je konvexný útvar.*

Príklad. Trojuholník, štvorec, polrovina, kružnica, štvorsten to všetko sú príklady konvexných útvarov.

Veta. *Ak majú dva konvexné útvary spoločný aspoň jeden bod, potom ich prienik je konvexný útvar.*

Axióm. (o supréme) *Každá omedzená množina reálnych čísel má suprémum.*

Veta. *Omedzený konvexný útvar na priamke, ktorý má aspoň dva body je úsečka.*

Poznámka. Rozmyslite si aký je vzťah medzi vyšie spomenutým axiómom a touto vetou.

V ďalšom výklade budeme potrebovať niekoľko definícií, ktoré budú iba spresnením intuitívnych pojmov.

Definícia. *Okolím bodu nazveme kružnicu (resp. guľu) so stredom v danom bode a kladným polomerom.*

Definícia. *Bod M nazveme vnútorným bodom útvaru U ak existuje okolie bodu M, ktoré celé patrí útvaru U.*

Definícia. *Bod M nazveme vonkajším bodom útvaru U ak existuje okolie bodu M, ktorého prienik s útvarom U je prázdna množina.*

Definícia. *Bod nazveme hraničným bodom, ak každé jeho okolie obsahuje vnútorný i vonkajší bod.*

Definícia. *Hranicou útvaru W nazveme množinu všetkých jeho hraničných bodov.*

Definícia. *Ak útvar obsahuje svoju hranicu nazveme ho uzavretým. Ak naopak neobsahuje žiaden bod svojej hranice nazveme ho otvoreným.*

Príklad. Majme tupouhlý trojuholík ABC potom stred opísanej kružnice je vonkajší bod, stred vpísanej kružnice vnútorný a trojuholník je uzavretý práve vtedy ak ho bereme aj s obvodom, ktorý je jeho hranicou.

Dohodnime sa, že v ďalšom texte budeme všetky útvary pokladať za uzavreté, ak nebude výslovne povedané inak.

Veta. *Priamka ktorá obsahuje aspoň jeden vnútorný bod omedzeného konvexného útvaru v rovine, alebo v priestore, pretína jeho hranicu práve v dvoch bodoch.*

Definícia. (operetná priamka) *Majme útvar U v rovine σ. Priamku p roviny σ nazveme operetnou ak má nasledujúce vlastnosti:*
(i) obsahuje aspoň jeden hraničný bod útvaru U;
(ii) útvar U leží v jednej polrovine určenej priamkou p, túto polrovinu potom nazývame operetnou polrovinou.
Najväčšiu vzdialenosť dvoch rovnobežných operetných priamok nazveme priemer a najmenšiu šírka.

Veta. *Nech U je omedzený útvar v rovine, potom existujú práve dve operetné priamky rovnobežné so zadanou priamkou ρ.*

Veta. *Ak je vzdialenosť dvoch rovnobežných operetných priamok o_1, o_2 rovná priemeru útvaru U, potom na každej z týchto priamok leží jediný hraničný bod a spojnica týchto bodov je kolmá k priamkam o_1, o_2.*

Teraz konečne prejdeme k jednej zaujímavšej vete ktorou ale už náš výklad aj ukončíme.

Veta. (Hellyova) *Majme v rovine $n \geq 4$ konvexných útvarov z ktorých každé tri majú spoločný aspoň jeden bod, potom majú všetky útvari spoločný aspoň jeden bod.*

A dva jej dôsledky:

Veta. (Jungova) *Každý rovinný útvar o priemere d sa dá umiestniť do kruhu o polomere $\frac{d}{\sqrt{3}}$.*

Veta. (Blaschkeova) *Do každého omedzeného konvexného útvaru v rovine, ktorý má šírku s, môžeme umiestniť kruh s polomerom $\frac{s}{2}$.*