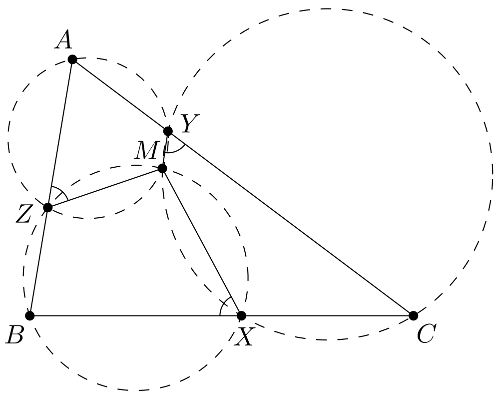
Miquelův bod

Martina Vaváčková

Mějme trojúhelník ABC. Na přímkách BC, CA a AB zvolme postupně body X, Y a Z. Kružnice opsané trojúhelníkům AYZ, BZX a CXY (tzv. *Miquelovy kružnice*) se protínají v jednom bodě, který nazveme *Miquelovým bodem* a označíme jej M. Trojúhelník XYZ se nazývá *Miquelův trojúhelník.*



Tvrzení 1. *Přímky MX, MY a MZ svírají s příslušnými stranami trojúhelníka ABC stejné úhly.*

Pokud jsou tyto úhly rovny $90°$, říkáme, že XYZ je pedální trojúhelník.

Tvrzení 2. *Platí následující rovnosti:*

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ZXY|,$$
$$|\sphericalangle CMA| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle XYZ|,$$
$$|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle YZX|.$$

Všimněme si, že jsou-li pevně dány trojúhelník ABC a bod M, pak existuje nekonečně mnoho jim příslušících Miquelových trojúhelníků. Všechny tyto trojúhelníky jsou navzájem podobné.

Věta. *Body X, Y, Z leží na jedné přímce, právě když bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.*

Tato věta zobecňuje tvrzení o Simsonově přímce, které říká, že paty kolmic z daného bodu na strany trojúhelníka leží na jedné přímce, právě když se tento bod nachází na kružnici opsané.

Úlohy

Úloha 1. Pro jaké polohy bodu M platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$?

Úloha 2. (Miquelův bod čtyřúhelníka) Mějme čtyři navzájem různoběžné přímky. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům tvořeným vždy třemi z těchto přímek se protínají v jednom bodě.

Úloha 3. (Miquelova věta o pětiúhelníku) Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Trojici bodů A, B, $EA \cap BC$ (pokud průnik existuje) opíšeme kružnici – totéž učiníme cyklicky pro další čtyři trojice bodů. Ukažte, že druhé průsečíky „sousedních“ kružnic (různé od A, B, C, D, E) leží na jedné kružnici.

Úloha 4. Nechť XYZ je Miquelův trojúhelník příslušící trojúhelníku ABC a M je jeho Miquelův bod.

(i) Zvolme libovolně bod P. Přímky AP, BP a CP protínají příslušné Miquelovy kružnice postupně v bodech A_1, B_1 a C_1. Ukažte, že A_1, B_1, C_1, P a M leží na jedné kružnici.

(ii) Body A, B a C veďme tři rovnoběžné přímky, které protnou příslušné Miquelovy kružnice postupně v bodech A_2, B_2 a C_2. Ukažte, že A_2, B_2, C_2 a M leží na jedné přímce.

Úloha 5. Buď D bod na straně BC trojúhelníka ABC. Přímka vedená bodem D protíná stranu AB v bodě X a polopřímku AC v bodě Y. Kružnice opsaná trojúhelníku BXD protíná kružnici ω opsanou trojúhelníku ABC v bodě Z ($Z \neq B$). Přímka ZD, resp. ZY protíná ω podruhé v bodě V, resp. W. Ukažte, že $|AB| = |VW|$. (APMO 2015)

Úloha 6. Na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC zvolme postupně body A_1, B_1 a C_1. Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1 a CA_1B_1 protnou kružnici opsanou $\triangle ABC$ podruhé v bodech A_2, B_2 a C_2. Obrazy bodů A_1, B_1 a C_1 ve středové souměrnosti podle středu strany, na níž leží, nazveme postupně A_3, B_3 a C_3. Dokažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou podobné. (AIMO 2007)

Úloha 7. Kružnice se středem O prochází vrcholy A a C trojúhelníka ABC a protíná úsečky AB a BC podruhé v bodech K a N. Kružnice opsané trojúhelníkům ABC a KBN se protínají ve dvou různých bodech B a M. Dokažte, že $|\sphericalangle OMB| = 90°$. (IMO 1985)

Literatura a zdroje

[1] Johnson, R. A.; *Advanced Euclidian Geometry*, Dover Publications, NY, 2007
[2] Ostermann, A. a Wanner, G.; *Geometry by Its History*, Springer, UK, 2012
[3] Zhao, Y.; *Cyclic quadrilatelars*, *http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf*
[4] *http://artofproblemsolving.com/*