

# Monskyho věta

RADO VAN ŠVARC

**ABSTRAKT.** Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s Monskyho větou. V první části budeme budovat zdánlivě nesouvisející teorii. Ve druhé pak tuto teorii využijeme k důkazu věty.

Zamysleme se nad následující otázkou – pro jaká přirozená  $n$  umíme rozřezat čtverec na  $n$  trojúhelníků o stejném obsahu? Je jednoduché ukázat, že pro sudá  $n$  je to vždy možné. Jak je to ale s lichými?

## Zdánlivě nesouvisející teorie

**Definice.** Nechtě  $p$  je prvočíslo. Potom jako  $p$ -valuaci nazveme funkci  $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že  $v_p(0) = 0$  a pokud  $r \neq 0$  je racionální číslo, pro které platí  $r = p^k \frac{a}{b}$ , kde  $k$  je celé číslo a  $a$  a  $b$  jsou celá čísla nedělitelná  $p$ , pak  $v_p(r) = p^{-k}$ .

Například  $v_2(\frac{3}{4}) = 4$ ,  $v_3(15) = \frac{1}{3}$  a  $v_5(1) = 1$ .

**Definice.** Funkci  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  nazveme *nearchimédovskou valuací*, pokud platí

- (1)  $(v(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ ,
- (2)  $v(xy) = v(x)v(y)$ ,
- (3)  $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ ,

pro libovolné  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Tvrzení.** Pokud  $v$  je nearchimédovská valuace a  $v(x) \neq v(y)$ , pak  $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$ .

## Rozšiřování $p$ -valuace

Povšimněme si, že  $v_p(x)$  naší definici nearchimédovské valuace téměř splňuje, pouze není definovaná v iracionálních číslech. Je možné tuto funkci vhodně na iracionálních číslech dodefinovat tak, že  $v_p$  zůstane nearchimédovskou valuací, ale my to dělat nebudeme. Vystačíme si se slabším tvrzením. Stále usilujeme o to, roztáhnout definiční obor na celé  $\mathbb{R}$ , ale místo  $\mathbb{R}_0^+$  budeme za obor hodnot naší valuace požadovat jen nějakou množinu  $M$ , pro kterou platí  $M = \{0\} \cup G$ , kde  $G$  je uspořádaná abelovská grupa (tj. množina s násobením a dělením, u které umíme určit, co je větší a co je menší) a kde pro každé  $a \in G$  platí  $0 \cdot a = 0$  a  $0 < a$ .

**Tvrzení.** Existuje nearchimédovská valuace  $w : \mathbb{R} \rightarrow M$  taková, že  $w\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ .

**Lemma.** (Zornovo) Mějme množinu  $X$ . O množině  $R$ , jejíž prvky jsou podmnožiny  $X$ , řekneme, že se jedná o řetězec, pokud pro každé dvě množiny  $A, B \in R$  platí  $A \subset B$  nebo  $B \subset A$ .

Nechť  $S$ , jejíž prvky jsou podmnožiny  $X$ , je neprázdná množina splňující následující podmínku: Pro každý řetězec  $R \subset S$  platí  $\bigcup R \in S$ . Pak existuje maximální množina  $M \in S$ . (Maximální množinou rozumíme takovou, že pro žádnou jinou množinu  $A \in S$  neplatí  $M \subset A$ .)

## A jdeme na to!

**Věta.** (Monskyho) Není možné rozřezat čtverec na lichý počet trojúhelníků se stejným obsahem.

Budeme pro spor předpokládat, že takové rozřezání je možné a budeme pracovat s takovýmto rozřezáním čtverce  $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ .

**Definice.** Řekneme, že bod se souřadnicemi  $[x, y]$  je obarven

- (1) modře, pokud  $w(x) \geq w(y), w(x) \geq w(1)$ ,
- (2) zeleně, pokud  $w(x) < w(y), w(y) \geq w(1)$ ,
- (3) červeně, pokud  $w(x) < w(1), w(y) < w(1)$ .

**Definice.** Výraz

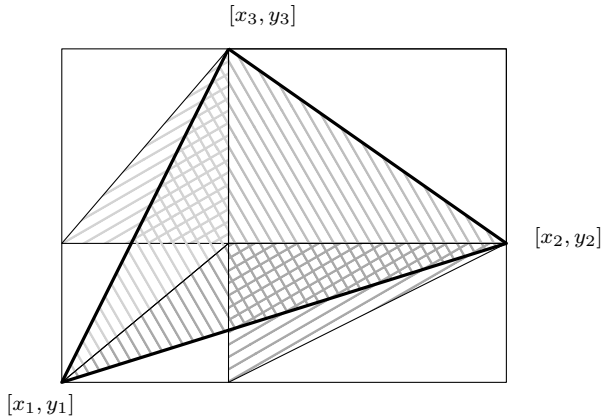
$$|a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|$$

budeme zkráceně značit jako

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Lemma.** Trojúhelník se souřadnicemi  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$  má obsah rovný

$$\frac{1}{2} \left| (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



**Definice.** Jako *duhový trojúhelník* nazveme takový trojúhelník, jehož každý vrchol má jinou barvu.

**Lemma.** Necht'  $[x_1, y_1]$ ,  $[x_2, y_2]$  a  $[x_3, y_3]$  jsou vrcholy duhového trojúhelníku. Potom

$$w \left( \begin{array}{ccc|c} x_1 & y_1 & 1 & \\ x_2 & y_2 & 1 & \\ x_3 & y_3 & 1 & \end{array} \right) \geq 1.$$

**Lemma.** V libovolném rozřezání čtverce se vyskytuje alespoň jeden duhový trojúhelník.

## Literatura a zdroje

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2010.