Nebojíme se geometrie

David Hruška

Abstrakt. V úvodu příspěvku je uvedeno několik známých úloh, jejichž řešení ilustruje základní techniky rovinné geometrie, jako jsou například úhlení nebo mocnost. Zbytek tvoří pseudonáhodný výběr pěkných a geometrických úloh různých obtížností, na jejichž řešení nejsou potřeba hluboké znalosti.

Nejprve si svižně projedeme několik typických „provarů", které je dobré znát, a pak se pustíme do řešení vesměs náhodných úloh. Budeme se snažit úlohy nejen vyřešit, ale i uvědomit si, proč naše řešení vede zrovna touto cestou. Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

Výzva. Kreslete si (co nejhezčí) obrázky! Často je daleko těžší přijít na to, co v obrázku platí, než to pak dokázat.

Základní vzdělání

Tvrzení. (Mocnost) *Dokažte, že spojnice průsečíků dvou protínajících se kružnic půlí jejich společnou tečnu (jakožto úsečku danou body dotyku).*

Tvrzení. (Bod Š) *Je dán trojúhelník ABC. Průsečík $\check{S}_a$ osy vnitřního úhlu u A a osy BC leží na kružnici opsané a je středem kružnice $BICE_a$, kde I a E_a jsou postupně vepsiště a A-připsiště. Navíc $|\check{S}_aI| = |\check{S}_aC|$.*

Tvrzení. (Shooting lemma) *Je dána tětiva BC kružnice k a střed jejího oblouku $\check{S}_a$. Jím procházející přímky p, q protnou přímku BC a kružnici k ve čtyřech bodech ležících na jedné kružnici.*

Tvrzení. (Equal tangents) *Body dotyku kružnice vepsané a připsané se stranou trojúhelníka jsou symetrické podle jejího středu.*

Kolik úloh dáte?

Úloha 1. Vnější společné tečny dvou neprotínajících se kružnic se jich dotýkají ve vrcholech rovnoramenného lichoběžníku. Dokažte, že jeho úhlopříčka vytíná na obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.

Úloha 2. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2.

Úloha 3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Na stranách AB a AC zvolíme po řadě body M, N. Kružnice s průměry BN a CM se protínají v bodech P a Q. Dokažte, že body P, Q a ortocentrum H trojúhelníka ABC leží na přímce.

(KMS 2003)

Úloha 4. Dokažte, že kolmiště je středem kružnice vepsané trojúhelníku s vrcholy v patách výšek.

Úloha 5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. (MO 53–III–4)

Úloha 6. Ve čtverci $ABCD$ označme M střed strany AB. Kolmice na MC procházející bodem M protíná stranu AD v bodě K. Ukažte, že $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle KCM|$.

Úloha 7. V trojúhelníku ABC se vepsaná kružnice dotýká strany BC v bodě D. Přímka $\check{S}_a D$ protne opsanou v bodě X. Dokažte, že $|\sphericalangle IXA| = 90°$, kde I je vepsiště trojúhelníka ABC.

Úloha 8. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014)

Úloha 9. Na straně BC ostroúhlého trojúhelníka ABC s kolmištem H je dán bod D. Kolmice na DH vedená bodem H protne strany AB, AC v bodech F, E. Dokažte, že

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|FH|}{|HE|}.$$

(Polsko)

Úloha 10. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě P. Označme K, L paty kolmic z P na AB, CD a dále buď M střed strany AD. Dokažte, že $|MK| = |ML|$. (USA TST 2000)

Úloha 11. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ svírá spojnice středu stran BC a AD stejné úhly s oběma úhlopříčkami. Dokažte, že tyto úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

(ARO 1990)

Úloha 12. V trojúhelníku ABC označme A_0 patu výšky z vrcholu A. Ukažte, že paty kolmic vedených z bodu A_0 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Úloha 13. Úhlopříčky AC a BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P. Středy kružnic opsaných $ABCD$, ABP, BCP, CDP a DAP označme postupně O, O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že OP, O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem.

Úloha 14. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme D, E a F průsečíky os úhlů se stranami BC, AB, AC. Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Úloha 15. Na straně AB pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$ ($AD \parallel BC \perp AB$) zvolíme bod X tak, aby $\sphericalangle CXD$ byl pravý. Dokažte, že se kolmice na CX skrz B a kolmice na DX skrz A protínají na CD.

Návody

1. Dokreselete chordálu kružnic.

2. Dokreslete připsanou kružnici k ABC a kružnici se středem v A a nulovým poloměrem.

3. Thaletovka a mocnost.

4. Vyúhlete.

5. Vyúhlete. Lépe se přenáší ty úhly, které mají na kružnici opsané čtverci svoji tětivu.

6. Najděte tětivák.

7. Dokažte $\sphericalangle \check{S}_a ID = \sphericalangle \check{S}_a XI$. Použijte vlastnosti bodu Š a Shooting lemma.

8. Dokreslete středy AB a AC a těžnicemi vyrobte podobné trojúhelníky

9. Na polopřímku BH naneste X, aby $|BH|/|HX| = |BD|/|DC|$, a odhalte kolmiště.

10. Středy PA a PD, jakožto středy přepon pravoúhlých trojúhelníků, vůbec nejsou špatné body.

11. Dokreslete střed AB.

12. Vyúhlete, že tři z daných bodů leží v přímce.

13. Odhalte rovnoběžníky a dokažte, že tam opravdu jsou.

14. Čím je E vůči ADC?

15. Využijte obdélník a jen ověřte nějaký poměr.

Zdroje

[1] Pepa Tkadlec: *Dokreslování*, Horní Lysečiny, 2013

Dále jsem čerpal z různých soutěží.