Pravděpodobnost

Helča Kubátová

Definice. (klasická definice pravděpodobnosti) *Má-li náš pravděpodobnostní prostor Ω jen konečně mnoho prvků (n) a všechny tyto elementární jevy jsou stejně pravděpodobné, můžeme pravděpodobnost každého tohoto jevu intuitivně spočítat jako $\frac{1}{n}$. Pravděpodobnost nějakého obecného jevu pak spočítáme jako „počet příznivých případů/počet všech elementárních jevů“.*

Definice. (Kolmogorovův model) *Mějme nějaký prostor Ω, jehož prvky budeme značit ω. Prvkům ω budeme říkat elementární jevy, Ω se nazývá prostor elementárních jevů. Dále je dán systém $\mathcal{A}$ množin prostoru Ω, který tvoří σ-algebru, to znamená:*

(i) *systém $\mathcal{A}$ je neprázdný,*
(ii) *je-li $A \in \mathcal{A}$, pak taky $A^c \in \mathcal{A}$,*
(iii) *jestliže $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak taky $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$.*

Množinám A se říká náhodné jevy.

Nakonec se předpokládá, že na množinách $A \in \mathcal{A}$ je definována nějaká pravděpodobnostní míra P splňující následující požadavky: nezápornost, σ-aditivita a normovanost.

Číslu $\mathrm{P}(A)$ se říká pravděpodobnost jevu A.

Definice. (závislost a nezávislost) *Nechť A, B jsou náhodné jevy a nechť $\mathrm{P}(B) > 0$. Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, se definuje vzorcem $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$. Jevy A a B nazveme nezávislé, pokud $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.*

Větička. Jsou-li A a B nezávislé jevy, pak A a B^c, A^c a B, A^c a B^c jsou rovněž dvojice nezávislých jevů.

Věta. (o úplné pravděpodobnosti) *Nechť B_1, B_2, ... , B_n je úplný systém jevů. Jsou-li všechny pravděpodobnosti $\mathrm{P}(B_m)$ kladné, pak pravděpodobnost kteréhokoli jevu A lze vypočítat jako $\mathrm{P}(A) = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_m)\,\mathrm{P}(B_m)$.*

Věta. (Bayes) *Nechť A je náhodný jev a nechť B_1, B_2, ... , B_n je úplný systém jevů. Jestliže $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B_1) > 0$, ... , $\mathrm{P}(B_n) > 0$, pak*

$$\mathrm{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}.$$