První setkání s polynomy

PEPA TKADLEC

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje základní vlastnosti polynomů s reálnými i s celočíselnými koeficienty a uvádí několik úloh k procvičení. Na konci jsou ke všem příkladům podány návody.

Polynomy jsou velmi speciální třídou funkcí a jako takové mají řadu zajímavých vlastností.

Teorie

Definice. *Polynom* stupně n je výraz tvaru $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde čísla a_i jsou koeficienty polynomu ($a_n \neq 0$) a x je proměnná. Koeficienty polynomu bývají zpravidla reálná nebo celá čísla. Stupeň nulového polynomu klademe roven -1.

Definice. *Kořen* polynomu $P(x)$ je takové číslo t, pro něž platí $p(t) = 0$.

Tvrzení. *Je-li t kořenem polynomu $P(x)$, pak lze psát $P(x) = (x - t)Q(x)$, kde $Q(x)$ je rovněž polynom.*

Důsledek. (Vietovy vztahy) *Má-li polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ n reálných kořenů $t_1, \ldots, t_n$, pak $P(x) = (x - t_1)(x - t_2)\ldots(x - t_n)$. Porovnáním koeficientů tak dostáváme*

$$a_i = (-1)^{n-i} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} t_{j_1} \cdots t_{j_i} \qquad j_i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Speciálně $a_0 = (-1)^n t_1 \cdots t_n$ a $a_{n-1} = -(t_1 + \cdots + t_n)$.

Poznámka. Má-li polynom stupně nejvýše n alespoň $n+1$ kořenů, pak je to nulový polynom.

Věta. *Každými $n + 1$ body lze proložit unikátní polynom stupně nejvýše n.*

Uveďme ještě dvě vlastnosti polynomů s celočíselnými koeficienty. Obě na přednášce dokážeme. První plyne z $a - b | a^n - b^n$, druhá se dokáže dosazením kořene.

KLÍČOVÁ SLOVA. polynomy, algebra, kořeny

Věta. *Má-li polynom $P(x)$ celočíselné koeficienty a $a, b \in \mathbb{Z}$, pak $a-b \mid P(a)-P(b)$.*

Věta. *Má-li polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $q = \frac{r}{s}$ (r, s nesoudělná), pak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Příklady

Příklad 1. Najděte všechny polynomy $P(x)$ splňující $P(0) = 0$ a $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ pro všechna reálná x.

Řešení. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $P(1) = 1$. Dosazením $x = 1$ obdobně dostaneme, že $P(2) = 2$. Postupně tak získáváme vztahy $P(5) = 5$, $P(26) = 26$, ... Polynom P se tedy v nekonečně mnoha hodnotách shoduje s polynomem $Q(x) = x$. To je podezřelé ...

Označím-li $R(x) = P(x) - Q(x)$, pak $R(x)$ je polynom, který má nekonečně mnoho kořenů (jsou jimi čísla 0, 1, 2, 5, 26, ...). Jedná se tedy o nulový polynom a $P(x) = Q(x)$.

Jediným polynomem, který vyhovuje zadání, je polynom $P(x) = x$. □

Příklad 2. Najděte všechny polynomy $P(x)$ splňující $P(2) = 6$ a $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ pro všechna reálná x.

Příklad 3. Buď $P(x)$ polynom stupně 2009 takový, že platí

$$P(k) = \frac{1}{k}, \quad \text{pro } k \in \{1, 2, \ldots, 2010\}.$$

Určete $P(2011)$. (PraSe 29)

Příklad 4. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d soustavu

$$a + b = c + d, \qquad ab = cd,$$

pak $\{a, b\} = \{c, d\}$. Dokažte.

Příklad 5. Ať a, b, c jsou reálná čísla taková, že

$$\begin{aligned} a + b + c &> 0, \\ ab + ac + bc &> 0, \\ abc &> 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že $a, b, c > 0$.

Příklad 6. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokažte, že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dva různé reálné kořeny. (KMS 10/11)

Příklad 7. Rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ má tři reálné kořeny. Ukažte, že platí-li $-2 \le a + b + c \le 0$, pak alespoň jeden z těchto kořenů leží v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

(ARO 2008)

Jiné příklady

Příklad 8. Ať $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(0) = P(1) = 2011$. Ukažte, že $P(x)$ nemá celočíselný kořen.

Příklad 9. Ať $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že je-li $P(n)$ dělitelné třemi pro tři po sobě jdoucí přirozená čísla, pak je dělitelné třemi pro všechna přirozená čísla.

Příklad 10. Polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty splňuje $P(0) = 1$. V kolika nejvíce různých celých číslech může nabývat hodnoty 2008? (PraSe 28)

Příklad 11. Ať $P(x)$ je polynom s přirozenými koeficienty. Pro každé n spočteme ciferný součet čísla $P(n)$. Dokažte, že některou hodnotu dostaneme nekonečněkrát.

(PraSe 21)

Příklad 12. Jsou dána nenulová celá čísla a, b, c taková, že i

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

jsou celá. Dokažte, že $|a| = |b| = |c|$. (KMS 08/09)

Literatura a zdroje

Čerpal jsem převážně z příspěvků *Michala Szabadose* a *Alexandra Kazdy* na totéž téma a z archivů různých soutěží.

Návody

Návod 1. Porovnejte stupně polynomů ne levé, resp. pravé straně a vyvoďte, že stupeň P je roven čtyřem. Všimněte si, že $P(0) = P(1) = 0$ a P je sudý, a z $P(2) = 6$ určete hodnotu čísla A ve vztahu $P(x) = A \cdot x^2(x^2 - 1)$.

Návod 2. Uvažte polynom $Q(x) = xP(x) - 1$ stupně 2010 a jeho kořeny. Vyjde $P(2011) = 0$.

Návod 3. Označte součet, resp. součin S, resp. P. Obě dvojice jsou kořeny kvadratického polynomu $x^2 - Sx + P = 0$.

Návod 4. Povšimněte si, že polynom $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma > 0$ může mít jen kladné kořeny.

Návod 5. Interpretujte $a+b+c$ jako $P(1)$ a c jako $P(0)$.

Návod 6. Přeložte zadanou podmínku do tvaru $|P(1)+1| \leq 1$, přepište $P(1)$ do součinového tvaru a z $|(1-r)(1-s)(1-t)| \leq 1$ vyvoďte, že jedna ze závorek musí být „malá“.

Návod 7. Z lemmatu by muselo $n \mid 2011$ a $n-1 \mid 2011$, což pro žádné celé n splněno není.

Návod 8. V číslech, která se liší o $3k$ od čísla, v němž je funkční hodnota dělitelná třemi, musí být díky lemmatu funkční hodnota rovněž dělitelná třemi.

Návod 9. Uvažte $Q(x) = P(x) - 2008$. Pak $-2007 = A(x-t_1)\dots(x-t_n)$ pro vhodné A, tedy $n \leq 5$. Ověřte, že existuje polynom, který hodnoty 2008 opravdu v pěti bodech nabývá.

Návod 10. Jak vypadá hodnota polynomu v „dostatečně velké“ mocnině desítky?

Návod 11. Substituujte za zlomky racionální čísla. Přesvědčte se, že tato racionální čísla jsou kořeny polynomu $x^3 - ux^2 + vx - 1$. Jako takové musejí být díky Větě rovny ± 1.