

# Shodná zobrazení

MARTIN „E.T.“ SÝKORA

**ABSTRAKT.** Příspěvek obsahuje několik příkladů, k jejichž řešení je vhodné využít shodná zobrazení.

Na přednášce se zaměříme převážně na řešení mnoha úloh a osvojení běžných metod, v nichž nám pomáhají shodná zobrazení. Teorii poněkud odbudeme, abychom měli více času na příklady. Koho zajímají hlubší poznatky k tomuto tématu, může si přečíst seriál z 31. ročníku od Pepy Tkadlece a Mirka Olšáka o geometrických zobrazeních.

## S čím budeme pracovat

**Definice.** Shodné zobrazení je zobrazení  $s$  z roviny  $\psi$  do roviny  $\psi$ , které zachovává délky úseček, tedy pro všechna  $A, B \in \psi$  platí  $|AB| = |s(A)s(B)|$ .

**Tvrzení.** Každé shodné zobrazení je buď osová souměrnost, otočení, posunutí, nebo posunutá souměrnost.

## A jdeme na to

**Příklad 1.** Mějme v rovině kružnici, přímku a bod. Nalezněte všechny úsečky, které mají jeden koncový bod na dané kružnici, druhý na dané přímce a střed v daném bodě.

**Příklad 2.** V rovině je dána přímka  $p$  a body  $A, B$  v jedné polorovině jí určené. Nalezněte bod  $X \in p$  takový, že délka  $|AX| + |XB|$  je nejmenší možná.

**Příklad 3.** V rovině je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$  a bod  $P$ . Dokažte, že délky úseček  $PA, PB$  a  $PC$  tvoří délky stran nějakého (i degenerovaného) trojúhelníku. Degenerovaný případ nastává, pokud  $P$  leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .  
(Pompeiuova věta)

**Příklad 4.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , znáte-li délky jeho čtyř stran  $a, b, c, d$  a odchylku  $\omega$  přímek  $a, c$ .

**Příklad 5.** V rovnoběžníku  $ABCD$  je dán bod  $P$  tak, že  $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180^\circ$ . Dokažte, že  $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ADP|$ .

**Příklad 6.** Na těžnici z vrcholu  $C$  trojúhelníku  $ABC$  nalezněme bod  $X$  tak, aby  $|BX| = |AC|$ . Označme  $Y$  průsečík přímky  $BX$  a strany  $AC$ . Ukažte, že trojúhelník  $CXY$  je rovnoramenný.

**Příklad 7.** Jednotkové kružnice  $k$  a  $l$  se dotýkají v bodě  $T$ . Kružnice  $m$  o poloměru 2 má střed na kružnici  $k$  a dotýká se jí v bodě  $B$ . Ukažte, že přímka  $BT$  prochází jedním z průsečíků kružnic  $l$  a  $m$ .

**Příklad 8.** Sestrojte lomenou čáru  $ABCDE$ , jsou-li dány body  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , které jsou středy úseček  $AB, BC, CD, DE, EA$ .

**Příklad 9.** Uvnitř pravouhlého rovnoramenného trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem u vrcholu  $C$  je dán bod  $P$ . Ukažte, že úsečky o délkách  $|PA|, |PB|$  a  $|PC|\sqrt{2}$  tvoří strany trojúhelníku.

**Příklad 10.** Uvnitř ostrého úhlu s rameny  $p, q$  je dán bod  $A$ . Nalezněte body  $P$  na  $p$  a  $Q$  na  $q$  tak, aby  $|AP| + |PQ| + |QA|$  bylo minimální. Co se stane, pokud bude zadaný úhel pravý nebo tupý?

**Příklad 11.** Existuje útvar se dvěma středy souměrnosti?

**Příklad 12.** Uvnitř čtverce  $ABCD$  je dán bod  $P$  tak, že  $|PD| = 1, |PA| = 2$  a  $|PB| = 3$ . Určete velikost úhlu  $APD$ .

**Příklad 13.** V rovině je dána přímka  $p$  a mimo ni (ve stejné polorovině) dva různé body  $A, B$ . Sestrojte na přímce  $p$  bod  $X$  tak, aby odchylka přímky  $AX$  od přímky  $p$  byla dvojnásobkem odchylky přímky  $BX$  od přímky  $p$ .

**Příklad 14.** Konvexní šestiúhelník  $ABCDEF$  vznikl slepením rovnostranného trojúhelníku  $AEF$  o straně  $a$ , rovnoběžníku  $ABDE$  splňujícího  $|AB| = 1$  a trojúhelníku  $BCD$  splňujícího  $|BC| + |CD| = 2$ . Navíc platí  $|CF| = 3$ . V závislosti na  $a$  určete obsah šestiúhelníku  $ABCDEF$ .

**Příklad 15.** Najděte body  $K, L$  a  $M$ , z nichž každý leží na jedné straně daného trojúhelníku a pro které je  $|KL| + |LM| + |MK|$  minimální.

**Příklad 16.** Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  a jeho průsečík výšek  $H$ . Ukažte, že obrazy bodu  $H$  v osových souměrnostech podle stran a středových souměrnostech podle středů stran trojúhelníku  $ABC$  leží na kružnici jemu opsané.

**Příklad 17.** (Fermatův bod) Mějme ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Najděte bod  $X$  takový, že  $|AX| + |BX| + |CX|$  je minimální.

## Poděkování a zdroje

Rád bych poděkoval *Pepovi Tkadlecovi* a *Mirkovi Olšákovi*, z jejichž seriálu (31. ročník) jsem čerpal. Dále dlužím díky *Frantovi Konopečkému* za příspěvek *Geometrická zobrazení*, kterým jsem se také nechal inspirovat.