# Sinová věta

Alča Skálová

**Věta.** (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, stranami $a$, $b$, $c$ a poloměrem kružnice opsané $R$ platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

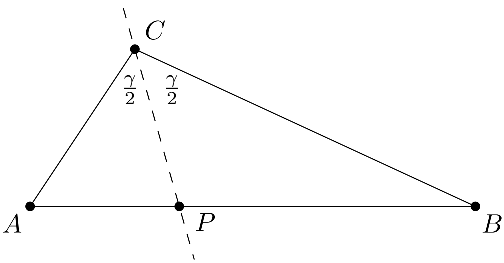
### Úlohy na zahřátí

**Příklad 1.** Mějme trojúhelník $ABC$, průsečík osy úhlu $ACB$ se stranou $AB$ označme $P$. Dokaž, že $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

*Řešení.* Použijeme sinovou větu na „sousední“ trojúhelníky $APC$ a $CBP$:

$$\frac{|AP|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle APC|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BP|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle CPB|}.$$

Jelikož ovšem $|\sphericalangle APC| = 180° - |\sphericalangle CPB|$, je $\sin|\sphericalangle APC| = \sin|\sphericalangle CPB|$ a dokončení úlohy je již pouze otázkou vyjádření z předchozích rovnic.




**Příklad 2.** Je dán trojúhelník $ABC$, střed strany $BC$ označme $M$. Nechť na straně $AB$ leží bod $P$. Označme $Q$ průsečík $AM$ a $PC$. Dokaž, že $|CQ| = |AB|$ právě tehdy, když $|AP| = |PQ|$.

**Příklad 3.** Mějme rovnostranný trojúhelník $ABC$, jeho střed označme $S$. Na straně $AB$ leží bod $D$ takový, že $|AS| = |AD|$. Postupně označme $E$ a $F$ průsečíky přímky $DS$ s $AC$ a $BC$. Dokaž, že $|DE| = |EF|$.

## Úlohy střední až těžké

**Příklad 4.** (netradiční) V pevném úhlu $XVY$ „plave“ tětiva konstantní délky $d$ s konci $A$ (na polopřímce $VX$) a $B$ (na polopřímce $VY$). Dokaž, že každá kružnice opsaná trojúhelníku $ABV$ se dotýká jedné pevné kružnice.

**Příklad 5.** V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách $TU$ a $UV$ po řadě body $X$, $Y$ tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky $TY$ a $VX$ se protínají v bodě $P$. Dokaž, že $P$ leží na ose úhlu $VWT$.

**Příklad 6.** Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček $P$. Dokaž, že platí

$$|AP| \cdot \sin\alpha + |CP| \cdot \sin\gamma = |BP| \cdot \sin\beta + |DP| \cdot \sin\delta.$$

**Příklad 7.** V trojúhelníku $ABC$ označme $M$ střed strany $BC$ a $T$ průsečík tečen v bodech $B$ a $C$ ke kružnici opsané trojúhelníku $ABC$. Dokaž, že potom $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle MAC|$. Přímka $AT$ je takzvaná *symediána.*

**Příklad 8.** Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany $AB$, $BC$ a $CD$ jsou stejně dlouhé a který není lichoběžník.[1] Označme $S$ průsečík jeho úhlopříček. Dokaž, že $|AS| = |SD|$, právě když $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADC| = 120°$.

(MKS, ročník 28)

**Příklad 9.** Je dán trojúhelník $ABC$. Buď $S$ střed strany $AB$ a $H$ ortocentrum $\triangle ABC$. Přímka $p$ je kolmice na $SH$ procházející bodem $H$. Její průsečíky s přímkami $AC$, $BC$ označme $P$, $Q$. Dokaž, že $|HP| = |HQ|$.

**Příklad 10.** Je dán rovnoramenný trojúhelník $ABC$ ($\alpha = \beta = 50°$). Na straně $AB$ nalezněme bod $K$ tak, že $|\sphericalangle ACK| = 50°$, dále sestrojme bod $L$ na straně $BC$ tak, aby $|\sphericalangle CAL| = 30°$. Urči $|\sphericalangle ALK|$.

**Příklad 11.** Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se všemi stranami shodné délky $a$. Průsečík úhlopříček $AD$ a $EC$ označme $S$. Víme, že $|\sphericalangle ASE| = 60°$. Dokaž, že dvě strany $ABCDE$ jsou rovnoběžné. (MEMO 2011, Mišo Szabados)

**Příklad 12.** Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme $P$, $Q$, $R$ paty kolmic z bodu $D$ postupně na $BC$, $CA$, $AB$. Dokaž, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ADC$ protnou na $AC$. (IMO 2003)

## Literatura a zdroje

Přednáška čerpá převážně ze staršího příspěvku Tomáše „Šavlíka“ Pavlíka.

[1] Neboli žádné dvě jeho strany nejsou rovnoběžné.