

Spirální podobnost

Franta Konopecký

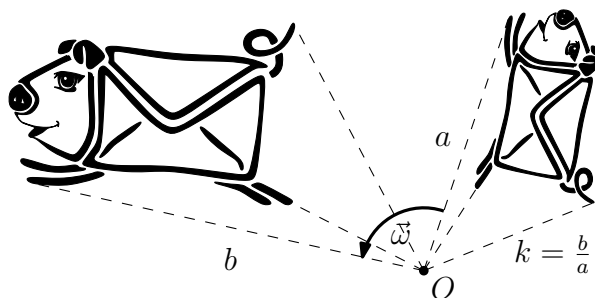
ABSTRAKT. Obsáhlý a souhrnný elaborát o *spirální podobnosti* (tj. složení stejnolehlosti a otočení), určený jednak jako ucelený studijní materiál využitelný i pro samostudium, druhak jako obsáhlý zdroj příkladů s návody a řešeními. Počet příkladů: 15, počet cvičení: 5, počet tvrzení o spirální podobnosti: 10.

Úvod

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny, které řeší některé jinak velmi složité úlohy. Cílem tohoto příspěvku je sestavit ucelený souhrn poznatků o spirální podobnosti, ukázat použití na příkladech a umožnit plnohodnotné nastudování problematiky.

Definice. *Spirální podobnost* je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti O , orientovaným úhlem otočení $\vec{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$.

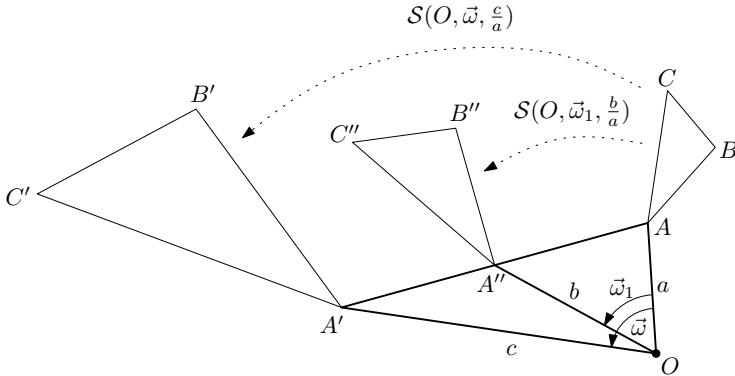
Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$



Motivační příklady

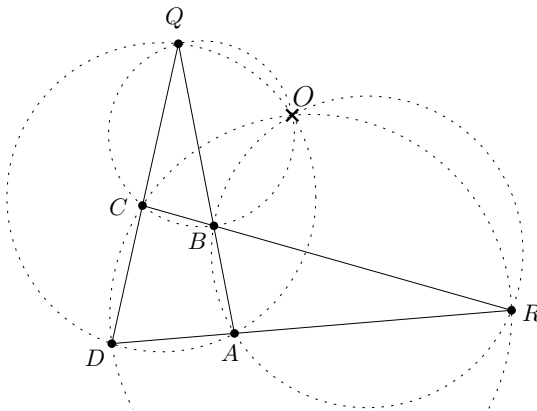
Příklad 1. V rovině jsou dány různě velké stejně orientované podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Středů úseček AA' , BB' , CC' označme po řadě A'' , B'' , C'' . Ukažte, že i trojúhelník $A''B''C''$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

KLÍČOVÁ SLOVA. spirální podobnost, geometrie, zobrazení, podobnost, hardcore, studijní text, stejnolehlost, otočení



Řešení. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jednoznačně určují spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, \frac{c}{a})$, která převádí jeden na druhý (to bude jedno z následujících tvrzení). Trojúhelníky OAA' , OBB' , OCC' mají stejný úhel u vrcholu O a stejný poměr přilehlých stran. Jsou tedy podobné, a to i s těžnicemi, podobné jsou tak i trojúhelníky OAA'' , OBB'' , OCC'' . Nová spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}_1, \frac{b}{a})$ zobrazuje trojúhelník ABC na $A''B''C''$. Spirální podobnost je podobné zobrazení, trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímk AB a CD označme Q a průsečík přímk AD a BC označme R . Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ , ADQ , ABR , CDR procházejí jedním bodem.



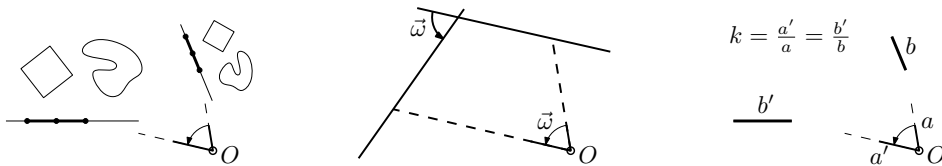
Řešení. Protože se všechny čtyři kružnice protínají ve středu spirální podobnosti O , která zobrazuje $A \rightarrow B$, $D \rightarrow C$, je důkaz dokončen.

S nynějšími znalostmi je předchozí důkaz neplatný, ale za několik málo okamžiků bude vše opravdu takto jednoduché!

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (Základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost platí:*

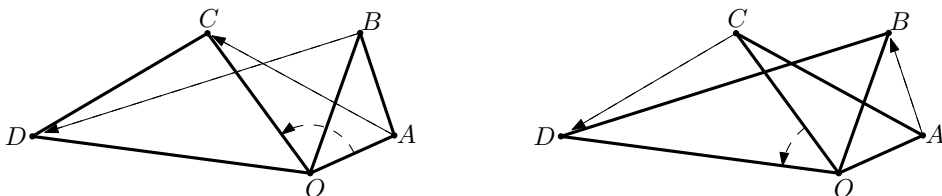
- (i) *Je to podobné zobrazení, obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
- (ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení.*
- (iii) *Poměr délký úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnohlosti.*



Tvrzení 2. (Speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\vec{\omega}$, k redukuje následovně.*

- (i) *Pro $\vec{\omega} = 0$ dostáváme stejnohlost se středem O a koeficientem k .*
- (ii) *Pro $\vec{\omega} = 180^\circ$ dostáváme stejnohlost se středem O a koeficientem $-k$.*
- (iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\vec{\omega}$.*
- (iv) *Pro $k = 1$ a $\vec{\omega} = 180^\circ$ dostáváme středovou souměrnost se středem O .*
- (v) *Žádná kombinace O , $\vec{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo nepřímé zobrazení.*

Tvrzení 3. (Spirální podobnosti chodí po dvou!) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \rightarrow C$ a $B \rightarrow D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \rightarrow B$ a $C \rightarrow D$, má též střed v O . Úhel otočení a koeficient se může lišit.*



Tvrzení 4. (Existence a jednoznačnost) V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \rightarrow C, B \rightarrow D$. (V případě rovnoběžníku $ABDC$ bychom potřebovali posunutí, které spirální podobnost neposkytuje.)

Návod. Jednoznačnost: řekněme, že existují dvě takové spirální podobnosti S_1 a S_2 s různými středy O_1 a O_2 . Zůstane v identitě $S_1 \circ S_2^{-1}$ bod O_1 na místě? Existence: je obsažena v tvrzení 6.

Lemma 5. (S.p. jednoznačně určena trojúhelníkem OAA' .) Buď $S(O, \vec{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A' . Potom platí následující.

- (i) Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.
- (ii) Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $S(O, \vec{\omega}, k)$.

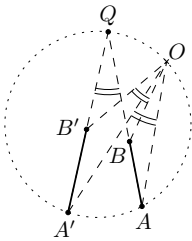
Značení. Orientovaný úhel ABC , tedy úhel od polopřímky $\mapsto BA$ k polopřímce $\mapsto BC$, budeme značit $\sphericalangle ABC$.

Tvrzení 6. (Konstrukce středu; existence) Buď $ABBA'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q . Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti $S\left(O, \sphericalangle AO\vec{A}'\right)$, $\frac{|AB|}{|A'B'|}$, která zobrazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B'$.

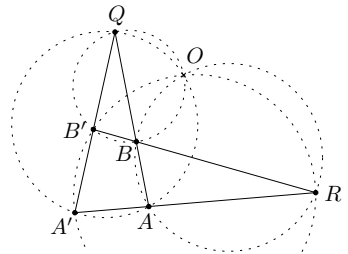
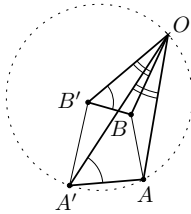
Důkaz. Pokud O splývá s Q , redukuje se spirální podobnost na otočení. Předpokládejme $O \neq Q$. Podle předchozího lemmatu 5 nám stačí k existenci spirální podobnosti se středem v O ukázat podobnost trojúhelníků OAA' a OBB' . Tu prubne shodnost úhlů. Díky rovnostem obvodových úhlů je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle OAA'| &= |\sphericalangle OQA'| = |\sphericalangle OQB'| = |\sphericalangle OBB'|, \\ |\sphericalangle OBB'O| &= |\sphericalangle OQO| = |\sphericalangle OAO| = |\sphericalangle OAA'O| \end{aligned}$$

a trojúhelníky OAA' a OBB' jsou podobné.



K předcházejícímu tvrzení



K následujícímu tvrzení

Tvrzení 7. (Průsečík čtyř kružnic, Miquel's point of quadrilateral) *Bud' $ABB'A'$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a $A'B'$ označme Q , průsečík přímek AA' a BB' označme R . Potom střed spirální podobnosti O , která zobrazuje $A \rightarrow A'$ a $B \rightarrow B'$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'Q$, $BB'Q$, ABR a $A'B'R$.*

Důkaz. Podle tvrzení 3 je O středem dvou spirálních podobností. Díky první z nich leží podle tvrzení 6 na kružnicích opsaných ABQ a $A'B'Q$ a díky druhé na kružnicích opsaných $AA'R$ a $BB'R$.

Poznámka. Předchozí tvrzení nám zároveň (už regulérně) dokázalo druhý motivační příklad.

Cvičení na spirální podobnost

Následují **důležitá** cvičení na pochopení principů spirální podobnosti. Jejich vyřešení (většinou pomocí některých tvrzení) je esenciální k pochopení těžších příkladů. Používejte v nich hlavně analogie k motivačnímu příkladu 1. Dále si zkuste pomocí tvrzení 4 o existenci a jednoznačnosti zdůvodnit, že spirální podobnost můžete použít, a navíc jednoznačně. Poté ze základních vlastností o podobnosti a lemmatu 5 hledejte další spirální podobnosti, případně využijte existence „duální“ spirální podobnosti podle tvrzení 3.

Cvičení 1. Na stěně visí dvoje hodiny, jedny jdou o čtvrt hodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 2. Kružnice k , l se protínají v bodech A , B . Bodem A se otáčí přímka, která protíná kružnici k podruhé v bodě K a l podruhé v L . Jakou množinu vykresluje střed úsečky KL ?

Cvičení 3. Zadání stejné jako v předchozím příkladě, akorát se ptáme, jakou množinu vykresluje bod N úsečky KL , pro který $|KN| = 2|LN|$.

Cvičení 4. Zadání stejné jako v předchozím příkladě plus je úsečka KL doplněna na rovnostranný trojúhelník KLM . Co maluje bod M ?

Návod. Dokažte, že má čtyřúhelník $BLMK$ pořád stejný tvar (z obvodových úhlů a stejného tvaru rovnostranného trojúhelníku). Všechny trojúhelníky BLM jsou si tím pádem podobné a spirální podobnost se středem v B , úhlem $\angle LBM$ a koeficientem $|BL|/|BM|$ zobrazuje každý bod L do nějakého bodu M .

Cvičení 5. Po třech různoběžných přímkách se rovnoměrně pohybují body A , B , C . Ukažte, že pokud jsou ve dvou časech t_1 , t_2 trojúhelníky ABC podobné, tak už jsou podobné v každém okamžiku.

Shrnutí spirální podobnosti

A na závěr výkladu uvádíme důležité fakty o spirální podobnosti, které by si měl důrazně osvojit každý, kdo ji chce umět používat.

- (i) S.p. je podobné zobrazení, všechny poměry a tvary se zachovávají.
- (ii) Úhel otočení je i úhlem odpovídajících si přímek v zobrazení.
- (iii) Středem s.p. prochází čtyři kružnice umožňující několikanásobnou rovnost obvodových úhlů.
- (iv) Každá s.p. má vždy duální s.p., která má stejný střed a poskytuje další rovnosti úhlů.
- (v) Pokud trojúhelník tvořený třemi rovnoměrně se pohybujícími body má dvakrát stejný tvar, má pořad stejný tvar.

Bohužel nejsou tvrzení o spirální podobnosti obecně známá, takže je dobré mít na paměti i náznaky jejich důkazů, abyste mohli použité fakty zdůvodnit. Viz cvičení 5.

Příklady na spirální podobnost

Příklad 3. (Simpsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že paty kolmic z D postupně na přímky AB , AC , BC leží na jedné přímce. Paty označme postupně P , Q , R .

Návod. Doplňte do obrázku bod S tak, aby byly trojúhelníky DQS , DRA a DPC podobné. Spirální podobnost $\mathcal{S}(D, \langle \overrightarrow{PDC}, \frac{|PD|}{|DC|} \rangle)$ zobrazuje trojici bodů P - Q - R na C - S - A , které leží na přímce.

Příklad 4. (USAMO 2006) Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E , F jsou body postupně na stranách AD , BC takové, že dělí strany ve stejném poměru $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE , SBF , TCF a TDE mají společný bod.

Návod. Najděte spirální podobnost zobrazující $A \rightarrow B$ a $D \rightarrow C$ a využijte tvrzení 6 o konstrukci středu.

Příklad 5. (PraSe 27-3-8) ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD . Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X , D , Y leží na jedné přímce a $X \neq D \neq Y \neq B$. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY . Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

Návod. Najděte spirální podobnost svazující tři Thaletovy kružnice.

Řešení. Dvě různá řešení najdete na <http://mks.mff.cuni.cz/archive/27/3.pdf>.

Příklad 6. (Od Kennyho) Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připišeme zvenčí podobné pravouhelníky² $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC , ML a AK procházejí jedním bodem.

Návod. Vezměte vhodnou spirální podobnost a zobrazte na sebe kružnice opsané našim pravouhelníkům.

Příklad 7. (Zobecnění IMO 2005) Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který není lichoběžník. Na stranách AB a CD jsou body E a F , které dělí své strany ve stejném poměru $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Průsečíky úhlopříček a přímky EF označme P , Q , R . Potom pro různé polohy bodu E prochází kružnice opsané trojúhelníku PQR ještě jedním pevným bodem (různým od průsečíku úhlopříček P).

Návod.

- (i) Vykreslete všechny kružnice vztahující se ke spirální podobnosti převádějící $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$.
- (ii) Pomocí obvodových úhlů ukažte, že střed oné spirální podobnosti leží na kružnici opsané trojúhelníku PQR .

Příklad 8. (Od Kennyho) Je dán pětiúhelník $ABCDE$ takový, že jsou si trojúhelníky ABC , ACD , ADE podobné. Označme T průsečík BD a CE . Ukažte, že přímka AT je kolmá na spojnici středů S_1 a S_2 kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE .

Návod.

- (i) Stačí vám ukázat, že $|AS_1| = |S_1T|$ a $|AS_2| = |S_2T|$.
- (ii) Pomocí spirální podobnosti dokažte rovnost úhlů $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BTC|$ a $ABCT$ je tětivový.

Příklad 9. (IMO Shortlist 2006) Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že jsou si trojúhelníky ABC , ACD , ADE podobné. Úhlopříčky BD a CE se protínají v P . Ukažte, že přímka AP pulí stranu CD .

Návod. Označme Q průsečík BD a AC , R průsečík DA a EC . Díky *Cèvovè Vètè*³ nám stačí ukázat $|AQ| : |QC| = |AR| : |RD|$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ si odpovídají ve spirální podobnosti, tedy i jejich průsečíky úhlopříček, a jsou tak zachovány potřebné poměry.

²Pravouhelník je obdèlník nebo ètverec.

³**Cèvova vètá:** Na stranách a , b , c trojúhelníka ABC jsou postupně body A_1 , B_1 , C_1 . Přímky AA_1 , BB_1 , CC_1 se protínají v jednom bodè, právě když platí rovnost $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1$.

Příklad 10. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u C . Označme M střed přepony a D takový bod odvěsny BC , že platí $|CD| = |CM|$. Nechť dále P značí průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CMB a BDA , $P \neq B$. Ukažte, že přímka BP je osou úhlu ABC .

Návod.

- (i) Najděte spirální podobnost zobrazující $\triangle CPM$ na $\triangle DPA$.
- (ii) Pomocí „duální“ spirálky a rovnosti $|CD| = |MA|$ ukažte shodnost $\triangle CPD$ a $\triangle MPA$.
- (iii) Uvědomte si, v jakém vztahu jsou výšky ve shodných trojúhelnících.

Příklad 11. (Čína 1992) Střed kružnice opsané tětívkovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme O . Úhlopříčky AC a BD se protínají v P . Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v P a Q . Předpokládejme, že jsou body O , P a Q různé. Dokažte, že $|\sphericalangle OQP| = 90^\circ$.

Návod.

- (i) Bod O si definujte jako průsečík os úseček AC a BD .
- (ii) Spirální podobnost se středem v O zobrazuje $AC \rightarrow BD$.
- (iii) Jestliže označíme S_1, S_2 středy úhlopříček, tak O, P, S_1, S_2 leží na Thaletově kružnici.
- (iv) Díky spirální podobnosti leží Q, P, S_1, S_2 též na jedné kružnici.

Příklad 12. (Mathlinks) Ke stranám konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ připišeme zvnějšku podobné trojúhelníky ABW, BCX, CDY, DAZ . Ukažte, že $WXYZ$ je rovnoběžník.

Návod.

- (i) Čtyřúhelník je rovnoběžníkem, jestliže středy úhlopříček splývají.
- (ii) Středy úseček AC, BD, WY, XZ označme R, S, T, U . Pomocí spirální podobnosti převádějící ABW na CDY ukažte podobnost $\triangle RST \sim \triangle ABW$ podobně jako v *příkladu 1*.
- (iii) Druhou spirální podobností ukažte $\triangle RSU \sim \triangle BCX$.
- (iv) Z podobností trojúhelníků plyne $T = U$.

Příklad 13. (PraSe 26-6-8) $PIVO$ je konvexní čtyřúhelník. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y . X je bod uvnitř $PIVO$ takový, že $|\sphericalangle XVO| = |\sphericalangle XPO| < 90^\circ$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90^\circ$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2|\sphericalangle XIV|$.

Návod.

- (i) Vezměme body X' a Y' tak, že platí podobnosti trojúhelníků $\triangle OPX \sim \triangle OY'X'$ a $\triangle VX'Y' \sim \triangle VXI$.
- (ii) Pomocí spirálních podobností se středy v O, V zobrazujícími $P \rightarrow Y' \rightarrow I$ ukažte $|PY'| = |Y'I|$, z čehož vyplyne $Y = Y'$.

Řešení. Úplné řešení najdete na <http://mks.mff.cuni.cz/archive/26/6.pdf>.

Příklad 14. (IMO Shortlist 1992) V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připseme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé.

Návod.

- (i) Zafixujte AC a rovnoběžně posouvejte BD , dedukujte pohyb oněch spojnic středů.
- (ii) Zjistěte, jestli kolmost platí v limitní poloze $B = C$.
- (iii) Pomocí spirálních podobností ukažte, že se při pohybu bodů B, D z limitní polohy do obecné polohy pohybují protější středy trojúhelníků stejně.

Příklad 15. (IMO Shortlist 2006) Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC zvolíme postupně body A_1, B_1, C_1 . Kružnice opsané trojúhelníkům $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ protnou kružnici opsanou podruhé v bodech A_2, B_2, C_2 . Body A_3, B_3, C_3 jsou středovými obrazy bodů A_1, B_1, C_1 postupně podle středů stran a, b, c . Ukažte, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_3B_3C_3$.

Návod.

- (i) Pomocí znalosti průniku kružnic jako středu s.p. ukažte, že $\triangle A_2BC \sim \triangle A_2C_1B_1$.
- (ii) Označme středy úseček b, c, AA_2 postupně S_b, S_c, S_{AA_2} . Ukažte $\triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle A_2BC$.
- (iii) S odkazem na cvičení 5 odůvodněte $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle AC_3B_3$.
- (iv) Ukažte shodnost odpovídajících úhlů v $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_3B_3C_3$.

Literatura, zdroje a poděkování

Především děkuji *Kennymu Rolínkovi*, že mě k tomuto tématu dotlačil a dodal kopu pěkných příkladů. Mými dalšími zdroji byly:

- [1] Archiv prasátka, <http://mks.mff.cuni.cz/archive/>.
- [2] Franta Konopecký, *Hýbání s body*, <http://frakon.matfyz.cz/files/HybaniSBody.pdf>.
- [3] Matematické fórum <http://www.mathlinks.ro>.
- [4] Yufei Zhao, *Similarity (IMO Training 2007)*, 2007, <http://web.mit.edu/yufeiz/www/similarity.pdf>.

Tento elaborát i materiál o hýbání s body bude zanedlouho ke stažení v knihovně semináře <http://mks.mff.cuni.cz/library/>.