The Big Picture

Rado van Švarc

Abstrakt. V příspěvku prozkoumáme konfiguraci určenou tětivovým čtyřúhelníkem zvanou The Big Picture.

Začneme několika základními definicemi, úmluvami a tvrzeními.

Úmluva. Kružnici opsanou trojúhelníku XYZ budeme značit jako (XYZ).

Věta. (Miquelova) *Pokud v trojúhelníku ABC zvolíme body X, Y, Z na přímkách BC, CA a AB, pak se kružnice (YAZ), (ZBX) a (XCY) protínají v jednom bodě.*

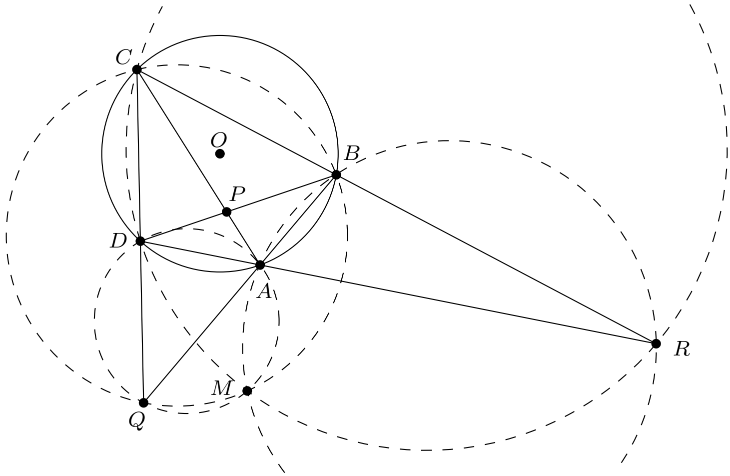
Tvrzení. *Nechť ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 a ℓ_4 jsou čtyři přímky, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Nechť C_{ijk} je kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_i, ℓ_j a ℓ_k (říkáme jim Miquelovy kružnice). Pak se C_{123}, C_{234}, C_{341} a C_{412} protínají v jednom bodě (zvaném Miquelův).*

Tvrzení. *Nechť A, B, C a D jsou čtyři body v rovině, které neleží na jedné přímce. Přímky AB a CD se protínají v bodě Q a přímky DA a CB se protínají v bodě R. Pak Miquelův bod určený přímkami AB, BC, CD a DA leží na přímce QR právě tehdy, když A, B, C a D leží na jedné kružnici.*

Úmluva. Dále budeme *Vobrázkem* myslet následující konfiguraci:

Na kružnici se středem O leží čtyři různé body A, B, C a D. Přímky AC a BD se protínají v P, přímky AB a CD se protínají v Q a přímky AD a BC se protínají v R. Dále M je Miquelův bod určený přímkami AB, BC, CD a DA.

Vobrázku se též někdy říká *The Big Picture*. Pozor, neplést se stejnojmennou konfigurací pro trojúhelník propojující připsiště a Feuerbachovu kružnici. Až na sdílené jméno nemají pranic společného. Protože se ovšem pod tímto názvem obvykle myslí „ta druhá“, budeme v příspěvku i na přednášce používat termín Vobrázek.



Poznámka. Ve Vobrázku platí, že M leží na QR.

Lemma. *Nechť W, X, Y a Z jsou čtyři body v rovině. Předpokládejme, že $W \neq X$ a $Y \neq Z$. Pak přímky WX a YZ jsou kolmé právě tehdy, když $|WY|^2 + |XZ|^2 = |WZ|^2 + |XY|^2$.*

Tvrzení. *Ve Vobrázku platí $OM \perp QR$.*

Tvrzení. *Ve Vobrázku prochází kružnice (AOC) a (BOC) bodem M.*

Důsledek. *Ve Vobrázku je přímka MO osou úhlů AMC a BMD.*

Tvrzení. *Ve Vobrázku leží body O, P a M na jedné přímce.*

Spiralizace

Na začátek tohoto oddílu si zopakujme pár základních tvrzení o spirální podobnosti.

Tvrzení. *Nechť W, X, Y a Z jsou čtyři body v rovině takové, že se WY a XZ protínají v bodě P. Buď Q průsečík kružnic (WXP) a (PYZ). Pak Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z.*

Tvrzení. („Spirální podobnost chodí po dvou“) *Pokud Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z, pak je to také střed spirální podobnosti přenášející W na X a Y na Z.*

Nyní získáváme zcela nový pohled na Vobrázek:

Poznámka. Ve Vobrázku je M střed spirální podobnosti přenášející A na B a D na C. Stejně tak se jedná o střed spirální podobnosti přenášející A na D a B na C.

S tímto pozorováním si novým způsobem ukážeme již dokázané tvrzení.

Tvrzení. *Ve Vobrázku platí $OM \perp QR$.*

Polarizace

V tuto chvíli si zavedeme několik základních pojmů vázajících se k polárám.

Definice. *Kruhová inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí k se středem O a poloměrem r, které bodu A různému od O přiřadí bod A' na polopřímce OA takový, že $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

Tvrzení. *Uvažme kruhovou inverzi určenou kružnicí k se středem I. Pak*

(i) *obrazem přímky procházející bodem I je ona sama,*
(ii) *obrazem přímky* **ne***procházející bodem I je kružnice procházející bodem I,*
(iii) *obrazem kružnice procházející bodem I je přímka* **ne***procházející bodem I,*
(iv) *obrazem kružnice* **ne***procházející bodem I je kružnice* **ne***procházející bodem I.*

Definice. Nechť k je kružnice se středem O. Pokud máme bod $P \neq O$ a přímku ℓ kolmou na OP a procházející inverzem k P vzhledem ke k, pak říkáme, že P je *pól* přímky ℓ a přímka ℓ je *polára* bodu P.

Tvrzení. *Pokud X je pól poláry ℓ_1 a Y je pól poláry ℓ_2, pak X leží na ℓ_2 právě tehdy, když Y leží na ℓ_1.*

Důsledek. *Tři póly leží na přímce právě tehdy, když jejich poláry prochází jedním bodem.*

Definice. Nechť k je kružnice a XYZ trojúhelník. Řekneme, že vzhledem ke k je XYZ *selfpolar* (někdy taktéž přezdívaný *tripolární*, ale to je méně zažitý název), pokud X je pól YZ, Y je pól ZX a Z je pól XY.

K čemu nám tyto definice a tvrzení jsou? Přinášejí totiž ještě jednu důležitou vlastnost Vobrázku.

Tvrzení. *Ve Vobrázku je trojúhelník PQR tripolární.*

Důsledek. *Ve Vobrázku je O kolmiště trojúhelníku PQR.*

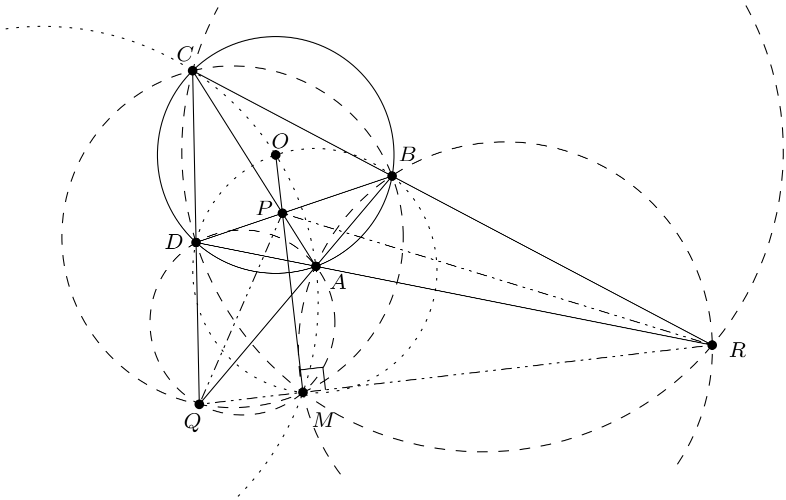
Shrnutí

Shrňme si vše důležité, co jsme zjistili, do jedné věty.

Věta. (Velká Věta Vo Vobrázku) *Nechť na kružnici se středem O leží čtyři různé body A, B, C a D. Přímky AC a BD se protínají v P, přímky AB a CD se protínají v Q a přímky AD a BC se protínají v R. Dále nechť přímka OP protíná přímku QR v bodě M. Potom platí:*

(1) *Kružnice (QAD), (QBC), (RAB), (RDC), (AOC) a (BOD) procházejí bodem M. Tedy M je Miquelovým bodem přímek AB, BC, CD a DA.*
(2) *Bod M je střed spirální podobnosti, která přenáší A na B a D na C. Zároveň se jedná o střed spirální podobnosti, která přenáší A na D a B na C.*
(3) *Platí $OM \perp QR$.*

(4) *Bod M je inverzem bodu P vzhledem ke kružnici $(ABCD)$.*
(5) *Trojúhelník PQR je tripolární vzhledem k této kružnici.*



Cvičení

Příklad 1. Kružnice se středem O prochází vrcholy A a C trojúhelníku ABC a protíná úsečky AB a BC znovu v bodech K a N. Kružnice (ABC) a (KBN) se protínají v bodech B a M. Dokažte, že $OM \perp MB$. (IMO 1985)

Příklad 2. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω se středem O. Jeho diagonály AC a BD se protínají v bodě P. Kružnice (APB) a (CPD) se protínají v bodech P a Q. Předpokládejme, že body O, P a Q jsou různé. Dokažte, že $OQ \perp QP$. (Čína 1992)

Příklad 3. Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech O a M. Kružnice ω se středem v O protíná zbylé dvě kružnice ve čtyřech různých bodech A, B, C a D takových, že $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Přímky AB a CD se protínají v bodě N_1 a přímky AD a BC v bodě N_2. Ukažte, že $OM \perp N_1N_2$.

Příklad 4. Uvažujme půlkružnici ω nad průměrem AB se středem O. Přímka ℓ protíná přímku AB v bodě M a půlkružnici ω v bodech C, D tak, že $|MA| > |MB|$ a $|MD| > |MC|$. Kružnice (AOD) a (BOC) se protínají v bodě K. Ukažte, že K leží na kružnici nad průměrem MO. (Rusko 1995, Rumunsko TST 1996, Írán 1997)

Příklad 5.

(1) Nechť A, B, C a D jsou čtyři body v rovině. Přímky AC a BD se protínají v P, přímky AB a CD v Q a přímky AD a BC v R. Přímka skrz P rov-

noběžná s QR protíná přímky AB a CD v bodech X a Y. Ukažte, že P je středem úsečky XY.

(2) (Butterfly Theorem) Buď ω kružnice s tětivou EF. Označme si střed EF jako P. Nechť skrz P prochází další dvě tětivy AC a BD. Nechť AB a CD protínají EF v bodech X a Y. Ukažte, že $|EX| = |YF|$.

Příklad 6. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník se středem O. Přímky AB a CD se protínají v bodě Q. Buď ℓ kolmice na OQ skrz Q. Přímky BD a AC protínají ℓ v bodech X a Y. Ukažte, že $|XQ| = |QY|$.

Příklad 7. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou ω. Tečny k ω v bodech B a C se protínají s bodě T. Nechť S je bod na polopřímce BC takový, že $AS \perp AT$. Body B_1 a C_1 leží na polopřímce ST tak, že $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$ tak, že C_1 leží na úsečce B_1S. Dokažte, že trojúhelníky ABC a AB_1C_1 si jsou podobné.

(USA TST 2007)

Příklad 8. Nechť ABC je trojúhelník s vepsištěm I. Označme si středy stran AB a AC jako M a N. Body D a E leží na stranách AB a AC tak, že $|DB| = |BC| = |CE|$. Přímka ℓ_1, resp. ℓ_2, je kolmice spuštěná z bodu D, resp. E, na přímku IM, resp. IN. Průsečík ℓ_1 a ℓ_2 označme jako P. Ukažte, že platí $AP \perp BC$.

Příklad 9. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany BC a AD jsou různoběžné a stejně dlouhé. Body E a F leží na stranách BC a AD tak, že $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF se protínají v bodě Q a přímky EF a AC se protínají v bodě R. Uvažujme všechny kružnice (PQR), když se body E a F hýbou po příslušných stranách. Ukažte, že všechny tyto kružnice mají společný bod různý od P. (IMO 2005)

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník, jehož kružnice vepsaná se dotýká stran AB, BC, CD a DA v bodech E, F, G a H.

(1) Ukažte, že přímky AC, EF a GH procházejí jedním bodem.
(2) Ukažte, že přímky AC, BD, EG a FH procházejí jedním bodem.

Příklad 11. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Přímky AB a DC se protínají v bodě Q a přímky AD a BC v bodě R. Tečny z bodu R se dotýkají dané kružnice v bodech X a Y. Ukažte, že Q, X a Y leží na jedné přímce. (Čína 1997)

Příklad 12. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník se středem O. Přímky AB a CD se protínají v bodě E, přímky AD a BC v bodě F a přímky AC a BD v bodě P. Dále se přímky EP a AD protínají v K. Buď M kolmá projekce bodu O na AD. Dokažte, že $BCMK$ je tětivový čtyřúhelník.

Příklad 13. Body A_1, B_1 a C_1 leží na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC. Kružnice (B_1AC_1), (C_1BA_1), (A_1CB_1) protínají (ABC) podruhé v bodech A_2, B_2 a C_2. Obrazy bodů A_1, B_1 a C_1 podle středů stran BC, CA a AB označme jako A_3, B_3 a C_3. Ukažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou si podobné.

(IMO SL 2006)

Příklad 14. Eulerův bod tětivového čtyřúhelníku

(1) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Nechť H_A, H_B, H_C a H_D jsou kolmiště trojúhelníků BCD, CDA, DAB a ABC. Ukažte, že $H_AH_BH_CH_D$ je jen obrazem $ABCD$ podle nějakého bodu E (tento bod nazýváme *Eulerův bod* čtyřúhelníku $ABCD$).
(2) Ukažte, že E leží na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC.
(3) Ukažte, že E leží na Simsonově přímce trojúhelníku ABC a bodu D.
(4) Ukažte, že E je Eulerův bod čtyřúhelníku $H_AH_BH_CH_D$.
(5) Ukažte, že E leží na kolmici ze středu AB na přímku CD.

Literatura a zdroje

[1] Yufei Zhao: *Cyclic Quadrilaterals - The Big Picture*, *http:/yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf*