

# Úhlení

VERČA HLADÍKOVÁ

**ABSTRAKT.** Příspěvek shrnuje základní metody řešení geometrických úloh. Uvádí jejich orientované verze, které nám umožňují vyhnout se rozebírání různých konfigurací bodů v řešení. Dále obsahuje úlohy vhodné k procvičení této techniky.

**Věta.** (Charakterizace tětívových čtyřúhelníků) *Nechť  $ABCD$  je konvexní čtyřúhelník. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i)  $ABCD$  je tětívový (má kružnici opsanou),
- (ii)  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$  (shodnost obvodových úhlů),
- (iii)  $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ$ .

**Věta.** (O středovém a obvodovém úhlu) *Body  $A, B, C$  leží na kružnici se středem  $S$ . Pak*

$$2|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASB|.$$

**Příklad.** (Lemma o dvou kružnicích) Jsou dány kružnice  $k, l$ , které se protínají v bodech  $A, B$ . Na kružnici  $k$  zvolme bod  $X$  a sestrojme  $Y$  jako průsečík přímky  $XB$  s kružnicí  $l$  (pokud  $X = B$ , pak přímkou  $XB$  myslíme tečnu ke kružnici  $k$ ). Ukažte, že nezávisle na volbě bodu  $X$  má trojúhelník  $AXY$  vždy stejné vnitřní úhly.

**Věta.** (O úsekovém úhlu) *Nechť  $ABC$  je trojúhelník vepsaný do kružnice  $k$  a  $p$  přímka procházející bodem  $A$ . Na přímce  $p$  zvolme bod  $X$  tak, aby úhel  $XAB$  byl ostrý nebo pravý. Pak platí, že  $p$  je tečna kružnice  $k$ , právě když  $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ACB|$ .*

**Definice.** *Obloukový úhel  $|\overrightarrow{AB}|$  dvou bodů  $A, B$  ležících na kružnici  $k$  je roven  $|\sphericalangle AXB|$  pro libovolný bod  $X$  ležící na opačném oblouku  $\overrightarrow{AB}$ .*

**Příklad.** Nechť je  $ABCD$  obdélník a  $P$  bod na jeho opsané kružnici různý od jeho vrcholů. Nechť  $W, X, Y$  a  $Z$  jsou kolmé projekce bodu  $P$  na strany  $AB, BC, CD$  a  $DA$ . Ukažte, že jeden z bodů  $W, X, Y$  a  $Z$  je ortocentrum trojúhelníka tvořeného zbylými body.

**Věta.** (O obloukových úhlech) *Nechť  $k$  je kružnice,  $A, B, C, D$  libovolné body na ní a  $X$  průsečík  $AD$  a  $BC$ . Pokud*

- (i)  $X$  leží uvnitř kružnice  $k$ , pak  $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|$ ,
- (ii)  $X$  leží na polopřímce  $DA$  mimo kružnici  $k$ , pak  $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{CD}| - |\overrightarrow{AB}|$ ,

(iii)  $X$  leží na polopřímce  $AD$  mimo kružnici  $k$ , pak  $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$ .

**Definice.** *Orientovaným úhlem*  $\sphericalangle(p, q)$  dvou přímk  $p, q$  (v tomto pořadí) nazveme úhel, o který je třeba otočit  $p$  (v kladném směru – tedy proti směru hodinových ručiček), aby otočená  $p$  byla rovnoběžná s  $q$ . Dovolujeme přitom také otáčení o nulový úhel (identita) a o záporný úhel (o absolutní hodnotu tohoto úhlu v záporném směru).

**Lemma.** (Základní vlastnosti orientovaných úhlů) *Pro přímky  $p$  a  $q$  platí*

- (i)  $\sphericalangle(p, p) = 0$ ,
- (ii)  $\sphericalangle(p, q) = -\sphericalangle(q, p)$ ,
- (iii)  $\sphericalangle(p, q) + \sphericalangle(q, r) = \sphericalangle(p, r)$ ,
- (iv)  $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p, q) + k \cdot 180^\circ$ , kde  $k$  je celé číslo,
- (v) pokud body  $A, B$  leží na jedné kružnici se středem  $S$ , pak  $\sphericalangle(AS, AB) = \sphericalangle(BA, BS)$  (opačná implikace platí za předpokladu, že tento úhel není nulový).

Můžeme tedy předpokládat, že  $\sphericalangle(p, q) \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ .

**Lemma.** *Pokud  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vnitřní (neorientované) úhly trojúhelníku  $ABC$ , potom nastává jedna ze dvou možností:*

- (i)  $\sphericalangle(CA, AB) = \alpha$ ,  $\sphericalangle(AB, BC) = \beta$ ,  $\sphericalangle(BC, CA) = \gamma$ ;
- (ii)  $-\sphericalangle(CA, AB) = \alpha$ ,  $-\sphericalangle(AB, BC) = \beta$ ,  $-\sphericalangle(BC, CA) = \gamma$ .

**Důsledek.** (součet úhlů v trojúhelníku) *Buďte  $A, B, C$  tři různé body v rovině. Pak*

- (i)  $\sphericalangle(AB, AC) + \sphericalangle(BC, BA) + \sphericalangle(CA, CB) = 180^\circ$ ,
- (ii)  $\sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle(BA, BC) + \sphericalangle(CB, CA)$ .

**Věta.** (O obvodovém a středovém úhlu pro orientované úhly) *Nechť body  $A, B, C, X$  leží na jedné kružnici se středem  $X$  pak*

- (i)  $\sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(AX, XC)$ .
- (ii)  $2 \cdot \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(SA, SC)$ .

**Věta.** (O úsekovém úhlu pro orientované úhly) *Přímka  $BX$  je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$  právě tehdy, když  $\sphericalangle(AC, CB) = \sphericalangle(AB, BC)$ .*

**Věta.** (o tětíkových čtyřúhelnících) *V rovině jsou dány 4 různé body  $A, B, C, D$ . Tyto body leží na jedné kružnici, právě když platí*

$$\sphericalangle(AC, AD) = \sphericalangle(CB, BD).$$

**Příklad.** (Folklor) *Jsou dány kružnice  $k_1, k_2, k_3, k_4$  tak, že  $k_i$  a  $k_{i+1}$  a protínají v bodech  $A_i$  a  $B_i$  ( $k_5 = k_1$ ). Ukažte, že pokud je  $A_1, A_2, A_3, A_4$  leží na jedné kružnici, pak i  $B_1, B_2, B_3, B_4$  leží na jedné kružnici.*

**Definice.** *Obloukový orientovaný úhel*  $|\sphericalangle \overrightarrow{AB}|$  oblouku  $AB$  kružnice  $k$  v kladném směru je roven  $|\sphericalangle(AX, BX)|$  pro libovolný bod  $X$  leží na oblouku  $\overrightarrow{B\hat{A}}$ .

**Věta.** (O orientovaných obloukových úhlech) *Nechť  $ABCD$  je tětíivový čtyřúhelník a  $X$  průsečík přímek  $AD$  a  $BC$ . Pak  $|\sphericalangle(AX, BX)| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|$ .*

**Úloha 1.** Přímký  $p, q$  se protínají v bodě  $S$ . Dále jsou dány body  $A, B$  takové, že  $\sphericalangle(p, SA) = \sphericalangle(SB, q)$ . Paty kolmic z bodů  $A, B$  na přímkou  $p$  označme postupně  $A_p, B_p$  a obdobně paty kolmic na přímkou  $q$  jako  $A_q, B_q$ . Dokažte, že body  $A_p, A_q, B_p, B_q$  leží na jedné kružnici.

**Úloha 2.** (Miquelova věta) Je dán trojúhelník  $ABC$ . Na přímkách  $BC, CA, AB$  leží postupně body  $X, Y, Z$ . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům  $AYZ, XBZ$  a  $XYC$  prochází jedním bodem.

**Úloha 3.** (Lemma o spirální podobnosti) Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se protínají v bodech  $X$  a  $Y$ . Přímká procházející  $X$  protíná  $k_1$  a  $k_2$  podruhé v  $A$  a  $B$ . Druhá přímká procházející  $X$  protíná  $k_1$  a  $k_2$  podruhé v  $C$  a  $D$ . Ukažte, že jsou si trojúhelníky  $AYC, BYD$  podobné.

**Úloha 4.** Je dán rovnoramenný trojúhelník  $SAC$  se základnou  $AC$ . Na přímkách  $SA, SC$  leží postupně body  $X, Z$  takové, že přímká  $XZ$  je rovnoběžná s přímkou  $AC$ . Buď  $O$  střed kružnice opsané trojúhelníku  $AZS$ . Ukažte, že přímký  $XC$  a  $SO$  jsou na sebe kolmé.

**Úloha 5.** (Švrčkův bod) V trojúhelníku  $ABC$  označme  $\check{S}$  druhý průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu  $A$  s kružnicí opsanou  $ABC$ . Dále označme  $\check{S}'$  druhý průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu  $A$  s kružnicí opsanou. Nakonec označme středy kružnic připsaných ke stranám  $BC, CA, AB$  postupně  $I_a, I_b, I_c$  a střed kružnice vepsané  $I$ . Dokažte

- (i)  $|\check{S}B| = |\check{S}C| = |\check{S}I| = |\check{S}I_a|$ ,
- (ii)  $|\check{S}'B| = |\check{S}'C| = |\check{S}'I_c| = |\check{S}'I_b|$ .

**Úloha 6.** Buď  $H$  průsečík výšek trojúhelníku  $ABC$  a  $H'$  obraz  $H$  v osové souměrnosti podle přímký  $AB$ . Dokažte, že  $H'$  leží na kružnici opsané  $ABC$ .

**Úloha 7.** Skrz průsečík výšek  $H$  trojúhelníku  $ABC$  vedeme přímkou  $p$ . Označme  $p_a, p_b$  osové obrazy přímký  $p$  podle přímek  $BC, CA$ . Dokažte, že se přímký  $p_a, p_b$  protínají na kružnici opsané.

**Úloha 8.** (Simsonova přímká) Buď  $P$  bod na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Dokažte, že paty kolmic z  $P$  na strany trojúhelníku (3 body) leží v jedné přímkě.

Přímká z předchozí úlohy se nazývá Simsonova přímká trojúhelníku  $ABC$  vzhledem k bodu  $P$ .

**Úloha 9.** Jsou dány body  $A, B, C, P$  na jedné kružnici. Kružnice  $k$  se dotýká přímký  $PA$  v bodě  $A$  a prochází bodem  $B$ . Druhý průsečík této kružnice s přímkou  $AC$  označme  $X$ . Dokažte, že přímká  $BX$  je kolmá na Simsonovu přímkou trojúhelníku  $ABC$  vzhledem k bodu  $P$ .

**Úloha 10.** Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Nechtě  $D, E, F$  paty výšek z vrcholů  $A, B, C$ . Jeden z průsečíků  $EF$  s kružnicí opsanou trojúhelníku  $ABC$  označme  $P$ . Průsečík přímk  $BP$  a  $DF$  označme  $Q$ . Ukažte, že  $AP = AQ$ .

(IMO Shortlist 2010)

**Úloha 11.** Na stranách trojúhelníka  $ABC$  leží postupně body  $P, Q, R$ . Nechtě  $k_A, k_B$  a  $k_C$  jsou kružnice opsané trojúhelníkům  $AQR, BRP, CPQ$ . Jsou-li  $X, Y$  a  $Z$  druhé průsečíky  $AP$  s  $k_A, k_B$  a  $k_C$ , pak ukažte, že  $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$ . (USAMO 2013)

**Úloha 12.** Nechtě  $MN$  je přímka rovnoběžná se stranou  $BC$  trojúhelníku  $ABC$ , tak že  $M \in AB$  a  $N \in AC$ . Přímky  $BN$  a  $CM$  se protínají v  $P$ . Kružnice opsané trojúhelníkům  $BMP$  a  $CNP$  se podruhé protínají v  $Q$ . Ukažte, že  $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAP|$ . (Balkán 2009)

**Úloha 13.** Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se protínají v bodech  $P$  a  $Q$ . Nechtě  $AC$  a  $BD$  jsou takové tětivy kružnic  $k_1$  a  $k_2$ , že přímky  $AB$  a  $CD$  se protínají v  $P$ . Přímky  $BD$  a  $AC$  se protínají v  $X$ .  $Y$  je bod na  $k_1$  takový, že  $PY \parallel BD$ .  $Z$  je bod na  $k_2$  takový, že  $PZ \parallel AC$ . Ukažte, že body  $Q, X, Y, Z$  leží na jedné přímce. (USA TST 2007)

**Úloha 14.** Je dán trojúhelník  $ABC$  s kružnicí opsanou  $k$ . Nechtě  $l$  je libovolná přímka v rovině a  $l_A, l_B, l_C$  obrazy  $l$  podle úseček  $BC, CA, AB$ . Nechtě  $A'B'C'$  je trojúhelník určený přímkami  $l_A, l_B, l_C$ .

(i) Ukažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku  $A'B'C'$  leží na  $k$ .

(Irán 1995)

(ii) Předpokládejme, že  $l$  je tečna  $k$ . Ukažte, že kružnice opsaná  $A'B'C'$  se dotýká kružnice  $k$ .

(IMO 2011/6)

## Návody

1. Najdi tětíkové čtyřúhelníky.
2. Najdi obvodové úhly a využij součet úhlů v trojúhelníku.
3. Využij velikost vedlejšího úhlu v tětíkovém čtyřúhelníku.
4. Použij středové a obvodové úhly.
5. (i) Osy úhlů jsou na sebe kolmé.  
(ii) Využij obvodové úhly.
6. Vyúhli.
7. Použij obloukové úhly.
8. Využij velikost vedlejších úhlů v tětíkových čtyřúhelnících.
9. Použij větu o úsekových úhlech.
10. Ukaž, že APFQ je tětíkový čtyřúhelník.
11. Použij lemma o spirální podobnosti.
12. Najdi tětíkové čtyřúhelníky a použij spirální podobnost.
13. Ukaž, že XQAC je tětíkový čtyřúhelník.

## Literatura a zdroje

- [1] Martin Tancer: *Orientované úhly*, Prudka, 2002.
- [2] Mirek Olšák: *Orientované úhlení*, Domašov, 2012.
- [3] Michal 'Kenny' Rolínek: *Angle chasing*, Dobrá voda, 2010.
- [4] Titu Andreescu a Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2011.
- [5] Evan Chan: <http://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf>